С.В. ГАЙДИДЕЙ

Теоретическая механика

РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Часть 3. Динамика материальной точки

Учебное пособие

Вологда – Молочное
2022

Министерство сельского хозяйства Российской Федерации

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Вологодская государственная
молочнохозяйственная академия имени Н.В. Верещагина»

Инженерный факультет

Кафедра энергетических средств и технического сервиса

Теоретическая механика

РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Часть 3. Динамика материальной точки

Учебное пособие
для студентов, обучающихся по направлениям подготовки:
35.03.06 – Агроинженерия,
15.03.02 – Технологические машины и оборудование,
27.03.01 – Стандартизация и метрология,
35.03.02 – Технология лесозаготовительных и деревоперерабатывающих производств

Вологда – Молочное
2022

УДК 531(07)
ББК 22.2(я73)
Г14

Р е ц е н з е н т ы:
канд. тенх. наук, доцент кафедры
энергетических средств и технического сервиса
А.Л. Бирюков,
канд. экон. наук, доцент кафедры
технические системы в агробизнесе
В.Ю. Ивановская

Гайдидей С.В.

Г14 Теоретическая механика. Руководство к решению задач. Часть 3. Динамика материальной точки: Учебное пособие / С.В. Гайдидей. – Вологда – Молочное: ФГБОУ ВО Вологодская ГМХА, 2022. – 100 с.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки:

35.03.06 – Агроинженерия,
15.03.02 – Технологические машины и оборудование,
27.03.01 – Стандартизация и метрология,
35.03.02 – Технология лесозаготовительных и деревоперерабатывающих производств.

Руководство будет способствовать лучшему усвоению студентами законов механики, овладению навыками инженерных расчетов, закреплению пройденного теоретического материала.

Руководство рассмотрено на заседании методической комиссии инженерного факультета и рекомендовано к изданию (протокол №2 от 14 октября 2022 г.).

УДК 531(07)
ББК 22.2(я73)

ВВЕДЕНИЕ

Динамика – это третий раздел теоретической механики, в котором изучается движение материальных тел под действием приложенных к ним сил.

Динамика необходима как для изучения последующих общеинженерных дисциплин («Сопротивление материалов», «Детали машин и основы конструирования», и др.), так и для изучения специализированных дисциплин.

Классически динамика делится на две части: динамика материальной точки (рассматривается в данной части пособия) и динамику материальной системы.

После изучения динамики материальной точки студент должен:

- *знать* основные понятия и теоремы динамики;
- *уметь* составлять дифференциальные уравнения движения точки и решать их с учетом начальных и конечных условий движения точки;
- *владеть* общими теоремами динамики для решения инженерных задач.

Данное учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 35.03.06 «Агроинженерия», 15.03.02 «Технологические машины и оборудование», 27.03.01 «Стандартизация и метрология», 35.03.02 «Технология лесозаготовительных и деревоперерабатывающих производств», а также для студентов, обучающихся по другим инженерным направлениям подготовки.

В начале каждой темы «Руководства» предлагается краткое изложение теоретических основ для решения задач. Теория излагается в наиболее доступной для студента форме; рассматривается порядок решения типовых задач, методы нахождения определенных величин, и т.д. Для некоторых разделов предлагаются алгоритмы решения, позволяющие последовательно решить типовую задачу.

Для получения навыков решения задач студент должен вначале попробовать решить задачу самостоятельно, а лишь затем свериться с решением.

В ходе решения задач приводятся подробные математические вычисления с указанием необходимых формул, что избавляет студента от необходимости использовать специальную литературу.

Тем не менее, предлагаемое пособие не избавляет студента от необходимости изучения теоретического материала по курсу дисциплины. Изучение руководства также предполагает, что студентом ранее были успешно освоены основы курсы дисциплин «Математика» и «Физика».

1 РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТОЧКИ

Первая задача динамики точки заключается в определении действующих на точку сил.

1. Дифференциальные уравнения движения материальной точки в координатной форме:

$$ma_x = \sum X_k\,, \quad ma_y = \sum Y_k\,, \quad ma_z = \sum Z_k\,, \tag{1.1}$$

где a_x, a_y, a_z – проекции вектора ускорения на координатные оси, определяются уравнениями:

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{d\upsilon_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}, \tag{1.2}$$

или

$$a_x = \dot{\upsilon}_x = \ddot{x}, \quad a_y = \dot{\upsilon}_y = \ddot{y}, \quad a_z = \dot{\upsilon}_z = \ddot{z}, \tag{1.3}$$

x, *y*, *z* – координаты точки (представляют собой функциональные зависимости от времени);

υ_x , υ_y, υ_z – проекции вектора скорости на координатные оси;

$\sum X_k$, $\sum Y_k$, $\sum Z_k$ – суммы проекций сил на соответствующие координатные оси.

2. Дифференциальные уравнения движения материальной точки в естественной форме:

$$ma_\tau = \sum F_{k\tau}\,, \quad ma_n = \sum F_{kn}\,, \quad \sum F_{kb} = 0\,, \tag{1.4}$$

где a_τ, a_n – проекции вектора ускорения соответственно на касательную и главную нормаль, определяются уравнениями:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}, \quad \text{или} \quad a_\tau = \dot{\upsilon} = \ddot{s}; \tag{1.5}$$

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{\rho}; \tag{1.6}$$

$\sum F_{k\tau}$, $\sum F_{kn}$, $\sum F_{kb}$ – суммы проекций сил на естественные оси: касательную, главную нормаль и бинормаль.

Задача 1.1. Материальная точка массы *m* движется согласно уравнениям $x = a\cos kt$, $y = b\sin kt$ (*a* и *b* – постоянные величины). Определить модуль и направление силы $\overline{F}$, вызывающей это движение, если известно, что сила зависит только от положения точки.

Решение:

Определим траекторию движения точки. Для этого из уравнений движения точки выразим:

$$\frac{x}{a} = \cos kt, \quad \frac{y}{b} = \sin kt. \tag{1.7}$$

Возведем полученные выражения в квадрат и почленно сложим:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{1.8}$$

Полученное уравнение является уравнением эллипса с центром в начале координат, a и b – полуоси эллипса по осям x и y соответственно (рис. 1.1).

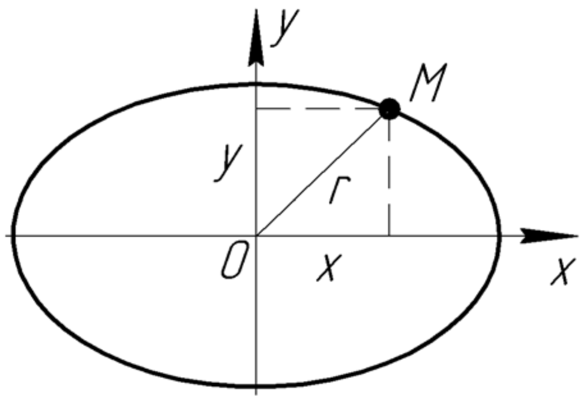


Рис. 1.1

Проекции ускорения точки M на координатные оси:

$$a_x=\ddot{x}=-ak^2\cos kt, \quad a_y=\ddot{y}=-bk^2\sin kt. \tag{1.9}$$

Тогда проекции силы $\overline{F}$:

$$F_x=ma_x=-mak^2\cos kt, \quad F_y=ma_y=-mbk^2\sin kt. \tag{1.10}$$

Подставляя сюда уравнения движения точки, получим:

$$F_x=-mk^2x, \quad F_y=-mk^2y. \tag{1.11}$$

Модуль силы $\overline{F}$:

$$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2}=mk^2\sqrt{x^2+y^2}. \tag{1.12}$$

Учитывая, что $\sqrt{x^2+y^2}=r$, где r – расстояние от начала координат до точки M, окончательно получим:

$$F=mk^2r. \tag{1.13}$$

Направление вектора $\overline{F}$ найдем через направляющие косинусы:

$$\cos\left(\overline{F},x\right)=\frac{F_x}{F}=-\frac{x}{r}, \quad \cos\left(\overline{F},y\right)=\frac{F_y}{F}=-\frac{y}{r}. \tag{1.14}$$

Таким образом, вектор силы $\overline{F}$ во все время движения будет направлен к началу координат – к точке O.

Задача 1.2. Материальная точка A движется по окружности радиуса r согласно уравнению $S=bt$ (b – постоянная величина). Определить силу $\overline{P}$, вызывающую это движение.

Решение:

Для определения действующей силы, если задана траектория движения, воспользуемся естественными осями координат (рис. 1.2) и уравнениями движения точки относительно этих осей:

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = P_\tau, \quad m\frac{\upsilon^2}{\rho} = P_n, \quad P_b = 0. \tag{1.15}$$

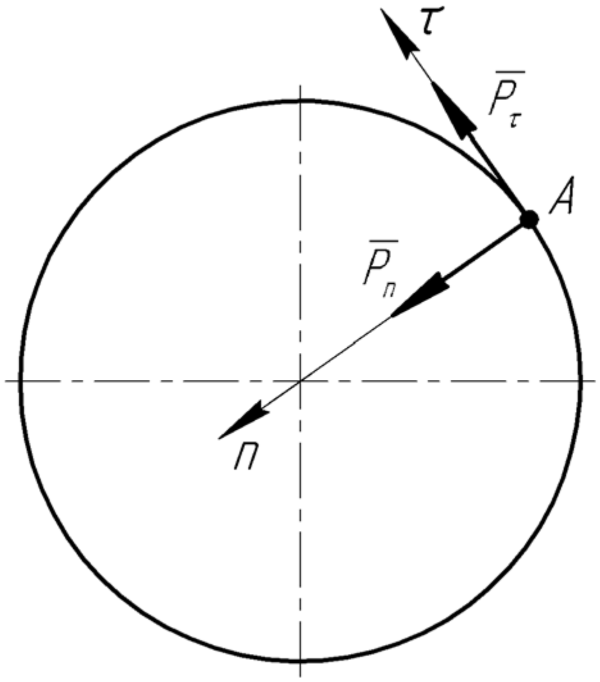


Рис. 1.2

Найдем скорость движения точки:

$$\upsilon = \frac{ds}{dt} = b. \tag{1.16}$$

Касательное ускорение точки:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = 0. \tag{1.17}$$

Таким образом,

$$P_\tau = 0, \quad P_b = 0, \quad P_n = \frac{mb^2}{r}. \tag{1.18}$$

Сила $\overline{P}$, вызывающая движение точки направлена по нормали к траектории (т.е. к центру окружности) и по модулю равна:

$$P = P_n = \frac{mb^2}{r}. \tag{1.19}$$

Задача 1.3. Плита, массой m положена на два катка и движется с ускорением a (рис. 1.3). Определить модуль силы $\overline{F}$, вызывающей это движение, пренебрегая весом катков и их проскальзыванием, если коэффициент трения качения катков по поверхности равен δ.

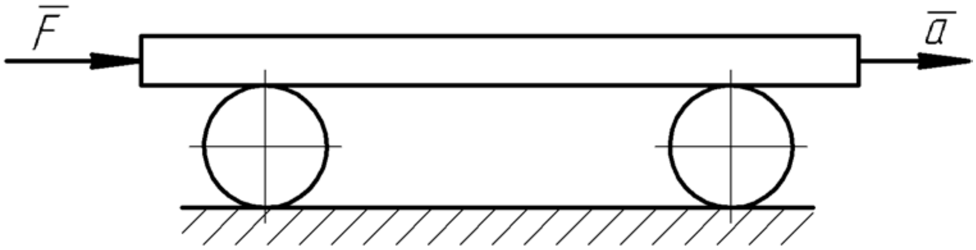


Рис. 1.3

Решение:

По основному уравнению динамики:

$$ma = F - F_{тр}, \tag{1.20}$$

где $F_{тр} = \dfrac{\delta}{r} mg$ – сила трения качения катков.

Тогда сила, вызывающая движение плиты, составит:

$$F = ma + mg \cdot \frac{\delta}{r} = m \cdot \left(a + \frac{\delta g}{r} \right). \tag{1.21}$$

Задача 1.4. Груз *M* веса $G = 10$ *Н* подвешен на нити длиной $l = 2$ *м* и совершает колебания по уравнению $\varphi = \dfrac{\pi}{6} \sin 2\pi t$, где φ – угол отклонения нити от вертикали, рад; *t* – время, с. Определить натяжения T_1 и T_2 нити при верхнем и нижнем положениях груза.

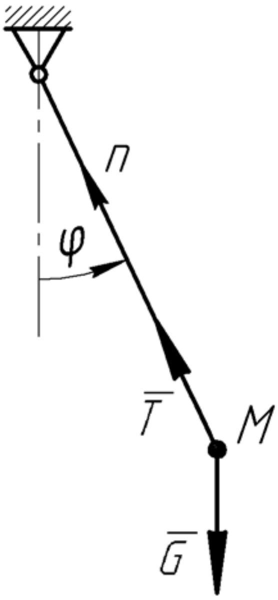


Рис. 1.4

Решение:

К грузу приложены сила $\bar{G}$ тяжести и сила $\bar{T}$ натяжения нити (рис. 1.4).

Дифференциальное уравнение движения груза в проекции на главную нормаль:

$$m\frac{\upsilon^2}{l} = T - G\cos\varphi \quad \text{или} \quad \frac{G}{g} \cdot \frac{\upsilon^2}{l} = T - G\cos\varphi, \tag{1.22}$$

где υ – линейная скорость груза.

Отсюда натяжение нити:

$$T = \frac{G}{g} \cdot \frac{\upsilon^2}{l} + G\cos\varphi.$$

Найдем угловую скорость нити:

$$\omega = \dot{\varphi} = \frac{\pi^2}{3} \cos 2\pi t.$$

В крайнем верхнем положении груза $\omega_1 = 0$. Тогда $\cos 2\pi t = 0$, откуда найдем время t_1:

$$2\pi t_1 = \arccos 0° = \frac{\pi}{2}, \qquad (1.25)$$

$$t_1 = \frac{1}{4}\ c. \qquad (1.26)$$

Угол отклонения нити при верхнем положении груза:

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{6} \cdot \sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}. \qquad (1.27)$$

Сила натяжения нити при верхнем положении груза, учитывая, что $\upsilon_1 = \omega_1 l = 0$, составит:

$$T_1 = G \cdot \cos\frac{\pi}{6} = 10 \cdot 0{,}866 = 8{,}66\ H. \qquad (1.28)$$

При нижнем положении груза $\varphi_2 = 0$. Тогда $\sin 2\pi t_2 = 0$, откуда $t_2 = 0$.

Скорость груза при нижнем положении груза:

$$\upsilon_2 = \omega_2 l = \frac{\pi^2 l}{3}\cos 0° = \frac{\pi^2 l}{3}, \qquad (1.29)$$

а сила натяжения нити:

$$T_2 = \frac{G}{gl} \cdot \left(\frac{\pi^2 l}{3}\right)^2 + G\cos 0° = G\left(1 + \frac{\pi^4 l}{9g}\right) = 10 \cdot \left(1 + \frac{3{,}14^4 \cdot 2}{9 \cdot 9{,}81}\right) = 32{,}02\ H. \qquad (1.30)$$

Задача 1.5. Лодка массы m движется в воде по закону $x = \frac{m}{a}\upsilon_0\left(1 - e^{-\frac{a}{m}t}\right)$, где υ_0 – начальная скорость движения лодки; a – постоянная величина. Определить силу сопротивления воды движению лодки.

Решение:

К лодке приложены сила $\bar{G}$ тяжести лодки, выталкивающая (архимедова) сила $\bar{N}$ и сила $\bar{R}$ сопротивления движению, направленная противоположно движению лодки (рис. 1.5).

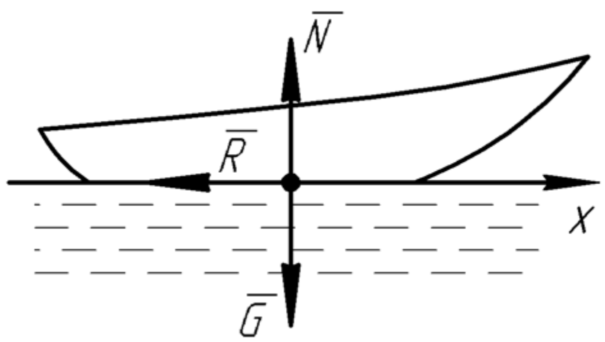


Рис. 1.5

Дифференциальное уравнение движения лодки в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = -R. \tag{1.31}$$

Продифференцируем дважды закон движения лодки:

$$\dot{x} = \upsilon_0 e^{-\frac{a}{m}t}, \quad \ddot{x} = -\upsilon_0 \cdot \frac{a}{m} e^{-\frac{a}{m}t}. \tag{1.32}$$

Подставив полученный результат в уравнение (1.31), получим:

$$R = m\upsilon_0 \cdot \frac{a}{m} e^{-\frac{a}{m}t} = \upsilon_0 a e^{-\frac{a}{m}t} = a\dot{x}. \tag{1.33}$$

Таким образом, сила сопротивления движению пропорциональна скорости лодки.

Задача 1.6. Точка массы $m = 1\,кг$ движется под действием трех постоянных сил $\overline{F}_1 = \overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$, $\overline{F}_2 = 2\overline{i} + 2\overline{j} + 2\overline{k}$ и $\overline{F}_3 = 3\overline{i} - 3\overline{j} + 5\overline{k}$. Какой угол составляет вектор $\overline{a}$ ускорения точки с осью y?

Решение:

Дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на координатные оси:

$$ma_x = \sum X_k, \quad ma_y = \sum Y_k, \quad ma_z = \sum Z_k. \tag{1.34}$$

Вектор силы $\overline{F}$ в общем случае равен:

$$\overline{F} = X \cdot \overline{i} + Y \cdot \overline{j} + Z \cdot \overline{k}, \tag{1.35}$$

где X, Y, Z – проекции силы $\overline{F}$ соответственно на координатные оси x, y и z;

$\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ – единичные векторы (орты) соответственно по координатным осям x, y и z.

Тогда проекции сил, действующих на точку:

$$\begin{aligned} &X_1 = 1\,H, \quad Y_1 = 1\,H, \quad Z_1 = 1\,H; \\ &X_2 = 2\,H, \quad Y_2 = 2\,H, \quad Z_2 = 2\,H; \\ &X_3 = 3\,H, \quad Y_3 = -3\,H, \quad Z_3 = 5\,H. \end{aligned} \tag{1.36}$$

Подставляя эти значения в дифференциальные уравнения, найдем проекции ускорения точки:

$$a_x = 6\ м/c^2, \quad a_y = 0, \quad a_z = 8\ м/c^2. \tag{1.37}$$

Ускорение точки:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10\ м/c^2. \tag{1.38}$$

Угол между вектором $\overline{a}$ и осью y найдем через направляющий косинус:

$$\cos(\overline{a}, y) = \frac{a_y}{a} = 0, \quad (\overline{a}, y) = \frac{\pi}{2}. \tag{1.39}$$

Задача 1.7. Поршень двигателя внутреннего сгорания совершает горизонтальные колебания согласно закону:

$$x = r\left(\cos\omega t + \frac{r}{4l}\cos 2\omega t\right), \qquad (1.40)$$

где r – длина кривошипа, l – длина шатуна, ω – угловая скорость вала (постоянная величина). Определить наибольшую силу, действующую на поршень, если его масса m.

Решение:

Дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = F_x. \qquad (1.41)$$

Продифференцируем дважды закон движения точки (1.40):

$$\dot{x} = -\omega r\left(\sin\omega t + \frac{r}{2l}\sin 2\omega t\right), \quad \ddot{x} = -\omega^2 r\left(\cos\omega t + \frac{r}{l}\cos 2\omega t\right). \qquad (1.42)$$

Сила, действующая на поршень:

$$F = -m\omega^2 r\left(\cos\omega t + \frac{r}{l}\cos 2\omega t\right) = -m\omega^2 r\left[\cos\omega t + \frac{r}{l}\left(\cos^2\omega t - \sin^2\omega t\right)\right]. \qquad (1.43)$$

Сила F достигает своего наибольшего значения, когда выражение, стоящее в скобках, будет максимальным, что имеет место при $\angle\omega t = 180°$, $\cos\omega t = -1$, $\sin\omega t = 0$, тогда:

$$F_{\max} = m\omega^2 r\left(1 + \frac{r}{l}\right). \qquad (1.44)$$

Задача 1.8. Масса кузова автомобиля (включая двигатель, трансмиссию и раму) $m_1 = 10000\ кг$, масса колес автомобиля с осями $m_1 = 1500\ кг$. Определить силу наибольшего и наименьшего давления автомобиля на дорогу при горизонтальном прямолинейном движении, если кузов автомобиля совершает на рессорах вертикальные колебания по закону $y = 0{,}02\sin 5t$, м.

Решение:

Рассмотрим вертикальные колебания кузова автомобиля. На кузов действуют сила тяжести $\overline{G}_1$ и реакция $\overline{R}$ колес автомобиля (рис. 1.6, *а*).

Дифференциальное уравнение движения кузова в проекции на ось y будет иметь вид:

$$m_1\ddot{y} = G_1 - R. \qquad (1.45)$$

Продифференцируем дважды закон колебаний кузова:

$$\dot{y} = 0{,}1\cos 5t, \quad \ddot{y} = -0{,}5\sin 5t. \qquad (1.46)$$

и подставим в дифференциальное уравнение:

$$-0{,}5 m_1 \sin 5t = m_1 g - R, \qquad (1.47)$$

откуда реакция колес автомобиля на кузов:

$$R = m_1 g + 0{,}5 m_1 \sin 5t. \qquad (1.48)$$

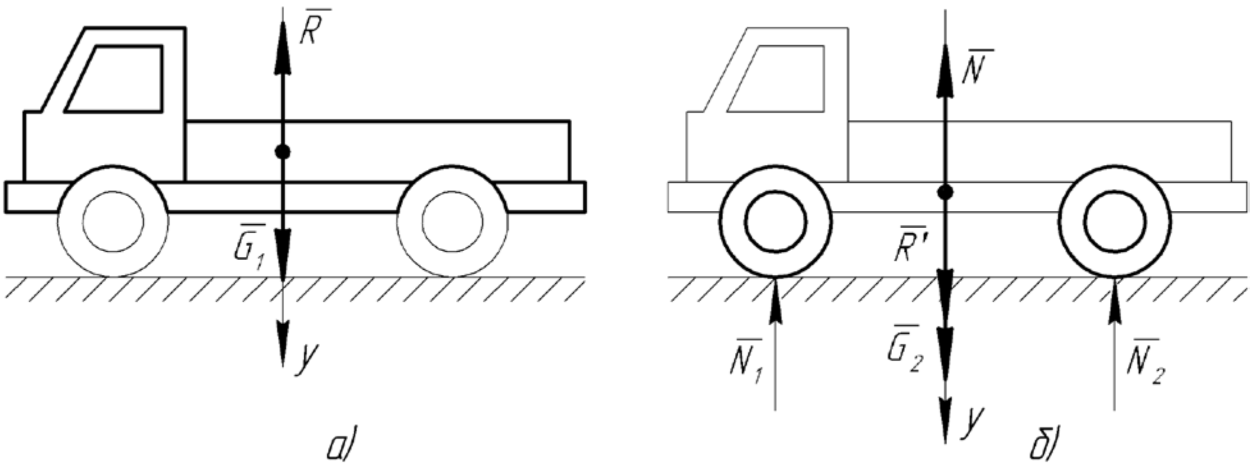


Рис. 1.6

Теперь рассмотрим движение колес автомобиля, как движение материальной точки, на которую действуют сила тяжести $\bar{G}_2$, сила $\bar{R}'$ давления кузова на колеса ($\bar{R}'$ равна силе $\bar{R}$ по модулю и противоположна по направлению), а также нормальная реакция $\bar{N}$ дороги (рис. 1.6, *б*). Сила $\bar{N}$ является геометрической суммой реакций $\bar{N}_1$ и $\bar{N}_2$ на каждое из колес автомобиля:

$$\bar{N} = \bar{N}_1 + \bar{N}_2 . \tag{1.49}$$

Составим дифференциальное уравнение движения в проекции на ось *y*:

$$m_2\ddot{y} = G_2 + R' - N . \tag{1.50}$$

Учитывая, что $\ddot{y} = 0$, $R' = R$, найдем нормальную реакцию:

$$N = m_2 g + R = m_2 g + m_1 g + 0{,}5 m_1 \sin 5t . \tag{1.51}$$

Нормальная реакция будет принимать максимальное значение при $\sin 5t = 1$, и будет минимальной при $\sin 5t = -1$:

$$N_{\max} = \left(m_2 + m_1\right) g + 0{,}5 m_1 = \\ = \left(1500 + 10000\right) \cdot 9{,}81 + 0{,}5 \cdot 10000 = 117815\ H, \tag{1.52}$$

$$N_{\min} = \left(m_2 + m_1\right) g - 0{,}5 m_1 = \\ = \left(1500 + 10000\right) \cdot 9{,}81 - 0{,}5 \cdot 10000 = 107815\ H. \tag{1.53}$$

Сила давления колес автомобиля на дорогу будет равна нормальной реакции по модулю и противоположно направлена.

Задача 1.9. Движение материальной точки массой *m* происходит по окружности радиуса *r* по уравнению $s = re^{2t}$. Определить величину равнодействующей сил, приложенных к точке как функцию времени.

Решение:

Основной закон динамики в проекциях на естественные оси:

$$ma_\tau = F_\tau, \quad ma_n = F_n. \tag{1.54}$$

Найдем скорость точки:

$$\upsilon = \dot{s} = 2re^{2t}. \tag{1.55}$$

Касательное ускорение точки:

$$a_\tau = \ddot{s} = 4re^{2t}. \tag{1.56}$$

Нормальное ускорение точки:

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{r} = 4re^{4t}. \tag{1.57}$$

Проекции равнодействующей $\overline{F}$ на естественные оси:

$$F_\tau = 4mre^{2t}, \quad F_n = 4mre^{4t}. \tag{1.58}$$

Модуль равнодействующей:

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2} = 2mr\sqrt{\left(e^{2t}\right)^2 + \left(e^{4t}\right)^2} = 2mre^{2t}\sqrt{1+e^{4t}}. \tag{1.59}$$

Задача 1.10. Движение материальной точки массой m по прямой линии, принятой за ось x, задано уравнением:

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2} = 2mr\sqrt{\left(e^{2t}\right)^2 + \left(e^{4t}\right)^2} = 2mre^{2t}\sqrt{1+e^{4t}}, \tag{1.60}$$

где b и υ_0 – постоянные величины. Определить силу $\overline{F}$, действующую на точку как функцию времени и как функцию скорости.

Решение:

Найдем значения скорости и ускорения точки:

$$\upsilon = \dot{x} = b \cdot \frac{\upsilon_0}{b} \cdot \frac{1}{1+\upsilon_0 t/b} = \frac{\upsilon_0}{1+\upsilon_0 t/b}, \tag{1.61}$$

$$a = \dot{\upsilon} = -\upsilon_0 \cdot \frac{\upsilon_0}{b} \cdot \frac{1}{\left(1+\upsilon_0 t/b\right)^2} = -\frac{\upsilon_0^2}{b\left(1+\upsilon_0 t/b\right)^2}. \tag{1.62}$$

Сила, действующая на точку:

$$F = ma = -\frac{m\upsilon_0^2}{b\left(1+\upsilon_0 t/b\right)^2}. \tag{1.63}$$

Знак «минус» показывает, что направление силы $\overline{F}$ противоположно направлению оси x.

Учитывая, что

$$\upsilon^2 = \frac{\upsilon_0^2}{\left(1+\upsilon_0 t/b\right)^2}, \tag{1.64}$$

найдем силу как функцию скорости:

$$F = -\frac{m\upsilon^2}{b}. \tag{1.65}$$

Задача 1.11. Определить радиус R виража самолета в горизонтальной плоскости, если плоскости крыльев наклонены к горизонту под углом α, а скорость самолета постоянна и равна υ.

Решение:

При полете на самолет действуют сила тяжести $\overline{G}$ и подъемная сила $\overline{F}_n$ (направлена перпендикулярно плоскости крыльев, рис. 1.7).

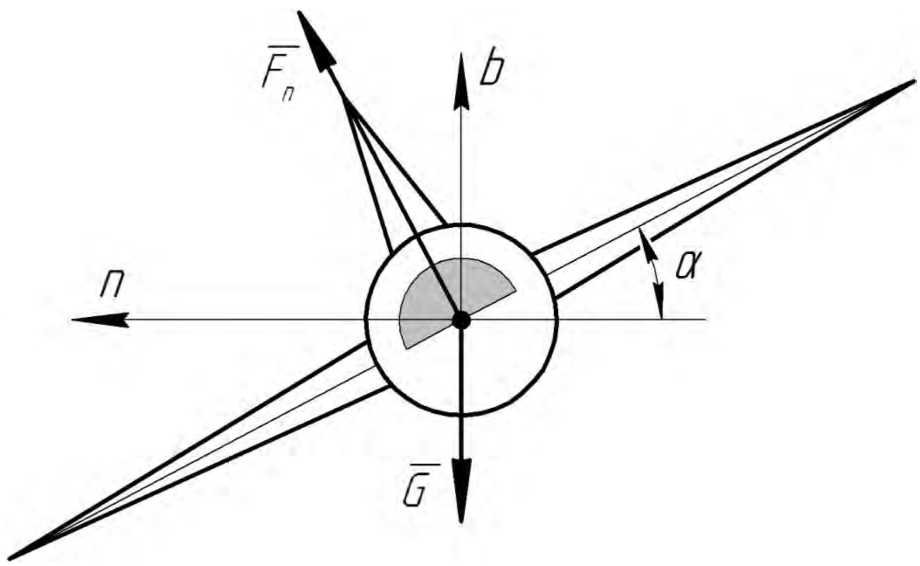


Рис. 1.7

Составим дифференциальные уравнения движения самолета в проекциях на главную нормаль и бинормаль:

$$m\frac{\upsilon^2}{R} = F_n \sin\alpha, \quad 0 = F_n \cos\alpha - G. \tag{1.66}$$

Определим из второго уравнения подъемную силу:

$$F_n = \frac{mg}{\cos\alpha}, \tag{1.67}$$

и подставим в первое:

$$m\frac{\upsilon^2}{R} = \frac{mg}{\cos\alpha}\sin\alpha. \tag{1.68}$$

Отсюда найдем радиус виража:

$$R = \frac{\upsilon^2}{g}\mathrm{ctg}\,\alpha. \tag{1.69}$$

2 РЕШЕНИЕ ВТОРОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТОЧКИ

Вторая задача динамики точки заключается в определении закона движения точки.

Порядок решения задач:

1. Выполнить схематический чертеж в соответствии с условиями задачи.

2. Выбрать систему координатных осей. Начало координат совместить с начальным положением точки. Оси координат направить оптимальным образом, так чтобы координаты точки и проекции ее скорости на координатные оси в рассматриваемый момент времени были положительными.

3. Изобразить точку, смещенной относительно начала координат в положительном направлении. Показать все действующие на точку силы, в том числе реакции связей.

4. Записать начальные условия движения точки в виде:

$$\begin{gathered} t=0; \quad x=x_0,\ y=y_0,\ z=z_0; \\ \upsilon_x=\upsilon_{0x},\ \upsilon_y=\upsilon_{0y},\ \upsilon_z=\upsilon_{0z}. \end{gathered} \tag{2.1}$$

5. Спроектировать на выбранные координатные оси все силы, действующие на точку, и подставить алгебраические суммы проекций всех сил на соответствующие оси в правые части уравнений:

$$m\frac{d\upsilon_x}{dt}=\sum X_k, \quad m\frac{d\upsilon_y}{dt}=\sum Y_k, \quad m\frac{d\upsilon_z}{dt}=\sum Z_k. \tag{2.2}$$

При этом переменные силы, действующие на точку, надо обязательно выразить через те величины, от которых они зависят.

6. Проинтегрировать полученные дифференциальные уравнения с учетом начальных условий.

7. Установить закон движения материальной точки и определить искомые величины, используя конечные условия движения точки.

В рассматриваемых далее задачах приведены примеры решения при действии на тело различных постоянных и переменных сил.

Задача 2.1. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью υ_0. Определить через какое время оно упадет обратно на землю и его скорость в момент соприкосновения с землей.

Решение:

Обозначим начальную точку движения тела, находящуюся на земле, точкой *A*, а самую верхнюю точку полета тела – точкой *B*.

Время полета тела:

$$t=t_1+t_2, \tag{2.3}$$

где t_1 – время полета тела от точки *A* до точки *B*;

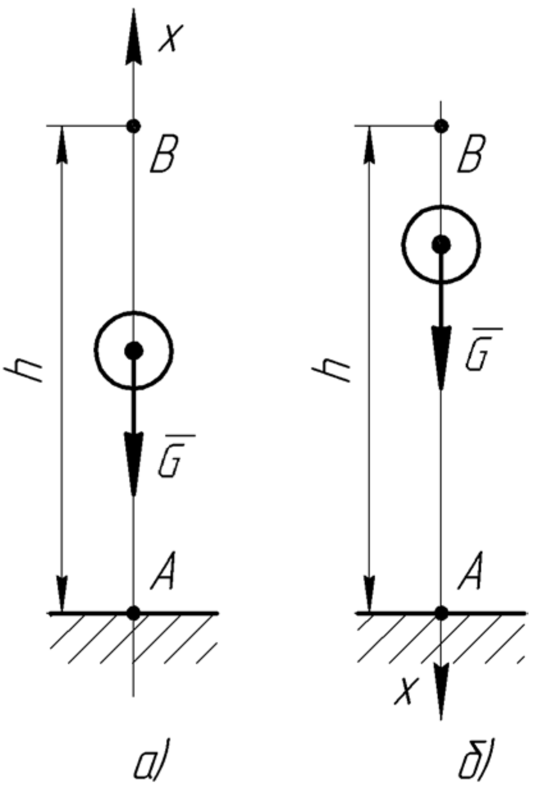


Рис 2.1

t_2 – время падения тела от точки B до точки A.

1) Рассмотрим движение тела от точки A до точки B. Изобразим тело и действующую на него силу тяжести (рис. 2.1, a). Ось x направим в сторону движения тела, т.е. вверх. Точку A примем за начало координат.

Начальные условия движения тела (в точке A):

$t = 0$

Составим дифференциальное уравнение движения тела:

или

Домножим обе части уравнения на dt и проинтегрируем:

$$\int d\upsilon_x = -g\int dt\,, \qquad (2.7)$$

$$\upsilon_x = -gt + C_1. \qquad (2.8)$$

Учитывая, что $\upsilon_x = \dfrac{dx}{dt}$, проинтегрируем уравнение (2.8) еще один раз:

$$\frac{dx}{dt} = -gt + C_1, \qquad (2.9)$$

$$dx = -g\int tdt + C_1\int dt\,, \qquad (2.10)$$

$$x = -g\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2. \qquad (2.11)$$

Для определения постоянных интегрирования подставим начальные условия (2.4) в уравнения (2.8) и (2.11). Получим, что $C_1 = \upsilon_0$, $C_2 = 0$.

Перепишем уравнения (2.8) и (2.11) с учетом найденных постоянных интегрирования:

$$\upsilon_x = -gt + \upsilon_0, \qquad (2.12)$$

$$x = -g\frac{t^2}{2} + \upsilon_0 t\,. \qquad (2.13)$$

Уравнение (2.12) будет представлять собой уравнение изменения скорости, а уравнение (2.13) – закон движения тела на участке AB.

Конечные условия движения тела на участке AB (в точке B):

$$t = t_1, \;\; \upsilon_x = 0, \;\; x = h, \tag{2.14}$$

где h – высота полета, м.

Подставим конечные условия в уравнения (2.12) и (2.13):

$$0 = -gt_1 + \upsilon_0, \quad h = -g\frac{t_1^2}{2} + \upsilon_0 t_1. \tag{2.15}$$

Отсюда найдем время полета тела от точки A до точки B:

$$t_1 = \upsilon_0 / g, \tag{2.16}$$

и высоту полета тела:

$$h = -\frac{g}{2} \cdot \frac{\upsilon_0^2}{g^2} + \upsilon_0 \cdot \frac{\upsilon_0}{g} = \frac{\upsilon_0^2}{2g}. \tag{2.17}$$

2) Рассмотрим падение тела от точки B к точке A (рис. 2.1, *б*). Покажем действующую на тело силу тяжести $\overline{G}$. Ось x направим в сторону движения тела, т.е. вниз, начало координат совместим сточкой B.

Тогда начальные условия движения тела (в точке B):

$$t = 0, \;\; \upsilon_x = 0, \;\; x = 0. \tag{2.18}$$

Дифференциальное уравнение движение тела будет иметь вид:

$$m\frac{d\upsilon_x}{dt} = G, \text{ или } \frac{d\upsilon_x}{dt} = g. \tag{2.19}$$

Интегрируя дважды, найдем уравнение скорости и закон движения тела на участке BA:

$$\upsilon_x = gt + C_3, \quad x = g\frac{t^2}{2} + C_3 t + C_4. \tag{2.20}$$

Подставим начальные условия (2.18) в уравнения (2.20) и найдем постоянные интегрирования: $C_3 = 0$, $C_4 = 0$.

Тогда уравнения (2.20) примут вид:

$$\upsilon_x = gt, \quad x = g\frac{t^2}{2}. \tag{2.21}$$

Запишем конечные условия движения тела на участке BA (в точке A):

$$t = t_2, \;\; \upsilon_x = \upsilon_A, \;\; x = h. \tag{2.22}$$

и подставим их в уравнение (2.21):

$$\upsilon_A = gt_2, \quad h = g\frac{t_2^2}{2}. \tag{2.23}$$

Тогда время падения тела:

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2}{g} \cdot \frac{\upsilon_0^2}{2g}} = \frac{\upsilon_0}{g}, \tag{2.24}$$

а скорость тела в момент соприкосновения с землей:

$$\upsilon_A = g \cdot \frac{\upsilon_0}{g} = \upsilon_0. \tag{2.25}$$

Общее время полета тела составит:

$$t = \frac{\upsilon_0}{g} + \frac{\upsilon_0}{g} = \frac{2\upsilon_0}{g}. \qquad (2.26)$$

Задача 2.2. Зернышко, получив начальную скорость υ_0, движется вниз по наклонной плоскости с углом наклона α к горизонту. Определить, какую скорость приобрело зернышко, пройдя по наклонной плоскости расстояние *l*, если коэффициент трения скольжения равен *f*.

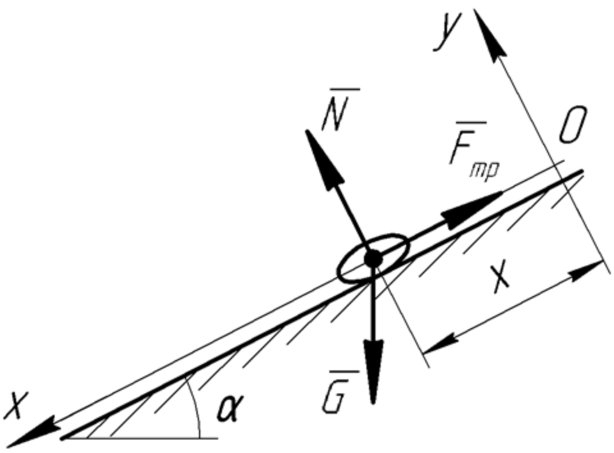


Рис. 2.2

Решение:

Зернышко примем за материальную точку и покажем действующие на нее силу тяжести $\overline{G}$, силу трения $\overline{F}_{тр}$ и нормальную реакцию $\overline{N}$ (рис. 2.2). Ось *x* направим в сторону движения точки, начало координат *O* совместим с начальным положением точки.

Тогда начальные условия:

Дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось *x* будет иметь вид:

$$m\frac{d\upsilon_x}{dt} = G\sin\alpha - F_{тр}. \qquad (2.28)$$

Сила трения:

$$F_{тр} = fN. \qquad (2.29)$$

Чтобы найти нормальную реакцию, составим дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось *y*, перпендикулярную оси *x*:

$$m\frac{d\upsilon_y}{dt} = N - G\cos\alpha. \qquad (2.30)$$

Учитывая, что проекция ускорения на ось у равна нулю:

$$a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = 0, \qquad (2.31)$$

получим:

$$N = G\cos\alpha. \qquad (2.32)$$

Тогда

$$F_{тр} = fG\cos\alpha, \qquad (2.33)$$

и уравнение (2.30) примет вид:

$$m\frac{d\upsilon_x}{dt} = G\sin\alpha - fG\cos\alpha \ \text{ или } \ \frac{d\upsilon_x}{dt} = g\sin\alpha - fg\cos\alpha. \qquad (2.34)$$

Разделяя переменные и интегрируя дважды, найдем:

$$\upsilon_x = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t + C_1, \qquad (2.35)$$

$$x = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2. \qquad (2.36)$$

Чтобы найти постоянные интегрирования, подставим в полученные уравнения начальные условия (2.27). Получим, что $C_1 = \upsilon_0$, $C_2 = 0$. Тогда

$$\upsilon_x = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t + \upsilon_0, \qquad (2.37)$$

$$x = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\frac{t^2}{2} + \upsilon_0 t. \qquad (2.38)$$

Конечные условия движения точки:

$$t = T, \;\; \upsilon_x = \upsilon, \;\; x = l, \qquad (2.39)$$

где T – время движения точки на участке длиной l, с;

υ – скорость в конце этого участка, м/с.

Подставим конечные условия в уравнения (2.37) и (2.38):

$$\upsilon = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)T + \upsilon_0, \qquad (2.40)$$

$$l = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\frac{T^2}{2} + \upsilon_0 T. \qquad (2.41)$$

Решая квадратное уравнение (2.41) относительно T, найдем его корни:

$$T = \frac{-2\upsilon_0 \pm \sqrt{4\upsilon_0^2 + 8gl(\sin\alpha - f\cos\alpha)}}{g(\sin\alpha - f\cos\alpha)}. \qquad (2.42)$$

В том случае, если перед квадратным корнем будет знак «минус», значение T будет отрицательно, что не имеет физического смысла. Следовательно:

$$T = \frac{-2\upsilon_0 + \sqrt{4\upsilon_0^2 + 8gl(\sin\alpha - f\cos\alpha)}}{g(\sin\alpha - f\cos\alpha)}. \qquad (2.43)$$

Подставляя значение T в уравнение (2.40), найдем значение скорости точки в конце участка:

$$\upsilon = \sqrt{4\upsilon_0^2 + 8gl(\sin\alpha - f\cos\alpha)} - \upsilon_0. \qquad (2.43)$$

Задача 2.3. Метателем (рис. 2.3) перебрасывается зерно с начальной скоростью $\upsilon_0 = 15\ м/с$ под углом $\alpha = 45°$. Зерно сходит с ленты на высоте $h = 1\ м$.

Пренебрегая силами сопротивления, найти: 1) траекторию движения зерна; 2) высоту полета зерна (по отношению к земле); 3) время полета; 4) дальность полета.

Решение:

Рассмотрим зернышко как материальную точку и покажем ее в произвольном положении; на точку будет действовать сила тяжести $\overline{G}$ (рис.

2.3). Выбираем оси координат x и y и записываем начальные условия движения точки:

$$t=0,\quad x=0,\quad y=h,\quad \upsilon_x=\upsilon_0\cos\alpha,\quad \upsilon_y=\upsilon_0\sin\alpha. \qquad (2.44)$$

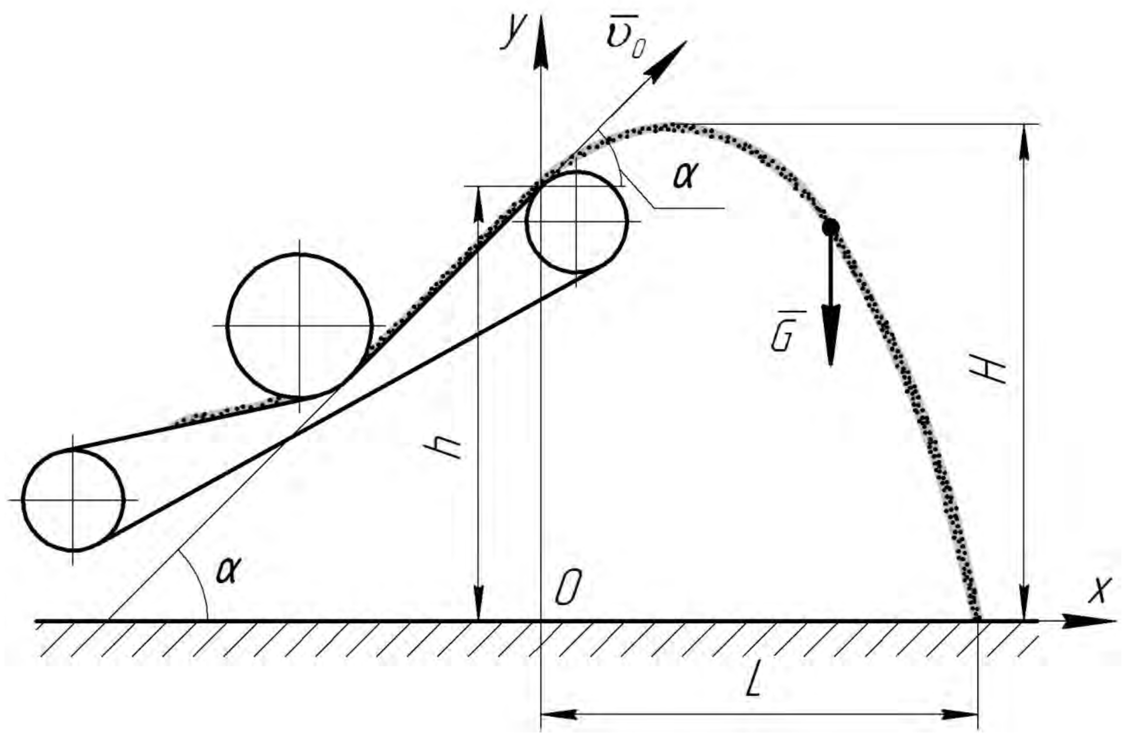


Рис. 2.3

Составляем дифференциальные уравнения движения точки в проекции на координатные оси:

$$m\frac{d\upsilon_x}{dt}=0,\quad m\frac{d\upsilon_y}{dt}=-G, \qquad (2.45)$$

или

$$\frac{d\upsilon_x}{dt}=0,\quad \frac{d\upsilon_y}{dt}=-g. \qquad (2.46)$$

Проинтегрируем эти уравнения дважды. Получим:

$$\upsilon_x=C_1,\quad \upsilon_y=-gt+C_2, \qquad (2.47)$$

$$x=C_1t+C_3,\quad y=-g\frac{t^2}{2}+C_2t+C_4. \qquad (2.48)$$

Подставим в эти уравнения начальные условия (2.44), найдем постоянные интегрирования:

$$C_1=\upsilon_0\cos\alpha,\quad C_2=\upsilon_0\sin\alpha,\quad C_3=0,\quad C_4=h. \qquad (2.49)$$

Тогда уравнения примут вид:

$$\upsilon_x=\upsilon_0\cos\alpha, \qquad (2.50)$$

$$\upsilon_y=-gt+\upsilon_0\sin\alpha, \qquad (2.51)$$

$$x=\upsilon_0 t\cos\alpha, \qquad (2.52)$$

$$y=-g\frac{t^2}{2}+\upsilon_0 t\sin\alpha+h. \qquad (2.53)$$

1) Выражая из уравнения (2.52):

$$t=\frac{x}{\upsilon_0\cos\alpha}, \qquad (2.54)$$

и подставляя в уравнение (2.53), найдем уравнение траектории:

$$y=-\frac{gx^2}{2\upsilon_0^2\cos^2\alpha}+x\operatorname{tg}\alpha+h, \qquad (2.55)$$

или с учетом числовых значений

$$y=-0,044x^2+x+1. \qquad (2.56)$$

Траекторией точки является парабола, ветви которой направлены вниз.

2) Найдем высоту H полета точки. В самой верхней точке $t=t_1$, $\upsilon_y=0$; подставим эти значения в уравнение (2.51):

$$0=-gt_1+\upsilon_0\sin\alpha, \qquad (2.57)$$

откуда найдем время движения точки с момента схода с ленты метателя до наивысшего положения:

$$t_1=\frac{\upsilon_0\sin\alpha}{g}. \qquad (2.58)$$

Подставляя это значение в уравнение (2.53) и, учитывая, что $y=H$, получим:

$$H=-\frac{g}{2}\cdot\frac{\upsilon_0^2\sin^2\alpha}{g^2}+\upsilon_0\sin\alpha\cdot\frac{\upsilon_0\sin\alpha}{g}+h=\frac{\upsilon_0^2\sin^2\alpha}{2g}+h. \qquad (2.59)$$

или с учетом числовых значений величин

$$H=6,73\ м. \qquad (2.60)$$

3) Найдем время T полета точки. Для этого подставим в уравнение (2.53) $t=T$, $y=0$:

$$0=-\frac{g}{2}\cdot T^2+\upsilon_0 T\sin\alpha+h, \qquad (2.61)$$

откуда

$$T=\frac{-\upsilon_0\sin\alpha\pm\sqrt{\upsilon_0^2\sin^2\alpha+2gh}}{2\cdot(-g/2)}=\frac{\upsilon_0\sin\alpha\pm\sqrt{\upsilon_0^2\sin^2\alpha+2gh}}{g}. \qquad (2.62)$$

Подставив числовые значения, получим корни квадратного уравнения: $T_1=2,25\ с$, $T_2=-0,09\ с$. Второй корень физического смысла не имеет, следовательно:

$$T=2,25\ с. \qquad (2.63)$$

4) Чтобы определить дальность L полета, подставим в уравнение (2.52) $t=T$, $x=L$:

$$L = \upsilon_0 T \cos\alpha \,, \tag{2.64}$$

или с учетом числовых значений

$$L = 23{,}86\ м. \tag{2.65}$$

Задача 2.4. Точка массы $m = 1\ кг$ движется без начальной скорости в горизонтальной плоскости под действием силы $\overline{F} = 2\overline{\tau} + 5t^2\overline{n}$, Н, где $\overline{\tau}$ и $\overline{n}$ – единичные векторы (орты) по касательной и главной нормали. Найти закон движения точки по траектории и форму траектории, если отсчет дуговой координаты производится от начальной координаты.

Решение:

Дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на естественные оси:

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = F_\tau, \quad m\frac{\upsilon^2}{\rho} = F_n. \tag{2.66}$$

Вектор силы $\overline{F}$ в общем случае равен:

$$\overline{F} = F_\tau \cdot \overline{\tau} + F_n \cdot \overline{n}\,, \tag{2.67}$$

где F_τ и F_n – проекции силы $\overline{F}$ соответственно на касательную и главную нормаль;

$\overline{\tau}$ и $\overline{n}$ – орты соответственно по этим осям.

Тогда проекции силы, действующей на точку:

$$F_\tau = 2, \quad F_n = 5t^2. \tag{2.68}$$

Подставим эти значения в дифференциальные уравнения:

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = 2, \quad m\frac{\upsilon^2}{\rho} = 5t^2. \tag{2.69}$$

Проинтегрируем первое уравнение:

$$m\upsilon = 2t + C. \tag{2.70}$$

Подставим начальные условия ($t = 0$, $\upsilon = 0$) и найдем, что $C = 0$, а значение скорости:

$$\upsilon = 2t/m. \tag{2.71}$$

Тогда второе дифференциальное уравнение примет вид:

$$\frac{m}{\rho}\cdot\frac{(2t)^2}{m^2} = 5t^2, \tag{2.72}$$

откуда

$$\rho = \frac{0{,}8}{m} = 0{,}8\ м. \tag{2.73}$$

Так как $\rho = const$, то траекторией движения точки является окружность радиуса $0{,}8\ м$.

Задача 2.5. При очистке семян гороха их пропускают сквозь горизонтальное колеблющееся решето, имеющее прямоугольные отверстия.

Горизонтальная скорость, с которой горошина подходит к краю отверстия, равна υ_0. Форма горошины – шар радиуса *R*.

Пренебрегая сопротивлениями, определить минимальную длину отверстия *b*, при которой горошина может проскочить сквозь него.

Примечание. Минимальная длина *b* отверстия устанавливается из условия, что в момент проскакивания через отверстия центр горошины расположен на уровне поверхности решета.

Решение:

Покажем действующую на горошину силу тяжести $\overline{G}$ и выберем координатные оси, совместив начальное положение горошины с началом координат (рис. 2.4).

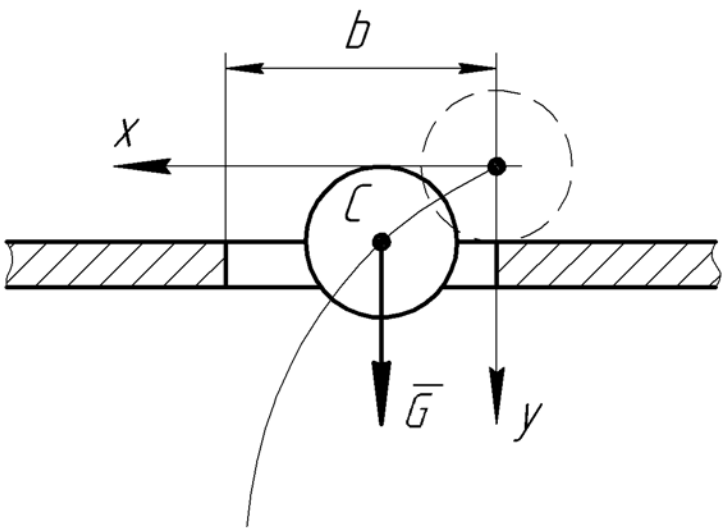


Рис. 2.4

Начальные условия движения горошины:

$$t = 0, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad \upsilon_x = \upsilon_0, \quad \upsilon_y = 0. \tag{2.74}$$

Составляем дифференциальные уравнения движения горошины при свободном падении:

$$m\frac{d\upsilon_x}{dt} = 0, \quad m\frac{d\upsilon_y}{dt} = G, \tag{2.75}$$

или

$$\frac{d\upsilon_x}{dt} = 0, \quad \frac{d\upsilon_y}{dt} = g. \tag{2.76}$$

Интегрируя дважды эти уравнения, получим:

$$\upsilon_x = C_1, \quad \upsilon_y = gt + C_2, \tag{2.77}$$

$$x = C_1 t + C_3, \quad y = g\frac{t^2}{2} + C_2 t + C_4. \tag{2.78}$$

Подставим в эти уравнения начальные условия и находим постоянные интегрирования:

$$C_1 = \upsilon_0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = 0. \tag{2.79}$$

Тогда уравнения движения горошины примут вид:

$$x = \upsilon_0 t, \quad y = g\frac{t^2}{2}. \tag{2.80}$$

Исключая из этих уравнений параметр *t*, найдем уравнение траектории:

$$y = \frac{gx^2}{2\upsilon_0^2}. \tag{2.81}$$

В момент проскакивания через отверстие (рис. 2.4) центр горошины расположен на уровне поверхности решета, тогда $x = l$, а $y = R$:

$$R = \frac{gl^2}{2\upsilon_0^2}, \tag{2.82}$$

откуда

$$l = \upsilon_0\sqrt{\frac{2R}{g}}. \tag{2.83}$$

Минимальная длина отверстия будет равна:

$$b = R + l = R + \upsilon_0\sqrt{\frac{2R}{g}}. \tag{2.84}$$

Задача 2.6. При разгоне грузового автомобиля из состояния покоя движущая сила возрастает пропорционально времени $P = kt$. Масса автомобиля $m = 10^4$ *кг*, коэффициент пропорциональности $k = 1{,}2$ $кН/с$. Определить закон движения автомобиля и путь, который он пройдет через 10 *с* после начала движения.

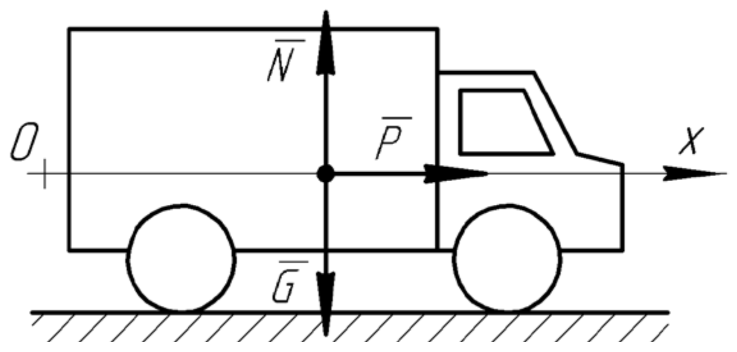


Рис. 2.5

Решение:

На автомобиль, принимаемый за материальную точку, действуют сила тяжести $\bar{G}$, нормальная реакция $\bar{N}$ и движущая сила $\bar{P}$, зависящая от времени (рис. 2.5).

Начальные условия движения автомобиля:

$$t = 0, \quad x = 0, \quad \upsilon_x = 0. \tag{2.85}$$

Составим дифференциальное уравнение движение автомобиля в проекции на ось *x*, направленную в сторону его движения:

$$m\frac{d\upsilon_x}{dt} = P \quad \text{или} \quad m\frac{d\upsilon_x}{dt} = kt. \tag{2.86}$$

Разделим уравнение на m, домножим на dt и проинтегрируем дважды:

$$\int d\upsilon_x = \frac{k}{m}\int t dt, \tag{2.87}$$

$$\upsilon_x = \frac{k}{m}\cdot\frac{t^2}{2} + C_1, \tag{2.88}$$

$$x = \frac{k}{m}\cdot\frac{t^3}{6} + C_1 t + C_2. \tag{2.89}$$

Подставляя начальные условия, найдем постоянные интегрирования: $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Тогда закон движения автомобиля будет иметь вид:

$$x = \frac{k}{6m}t^3, \tag{2.90}$$

или с учетом числовых значений

$$x = \frac{1{,}2\cdot 10^3}{6\cdot 10^4}\cdot t^3 = 0{,}02t^3, \text{ м.} \tag{2.91}$$

Найдем путь ***s***, пройденный автомобилем за $t = 10\ c$:

$$s = 0{,}02\cdot 10^3 = 20\ м. \tag{2.92}$$

Задача 2.7. Лодка массой $m = 50\ кг$ движется с начальной скоростью $\upsilon_0 = 1\ м/с$. Сила сопротивления воды при малых скоростях пропорциональна скорости, т. е. $\overline{R} = \mu\overline{\upsilon}$, где $\mu = 9{,}1\ кг/с$ – коэффициент пропорциональности. Определить за какое время скорость лодки уменьшится втрое и путь, пройденный лодкой за это время. Найти также путь, пройденный лодкой до полной остановки.

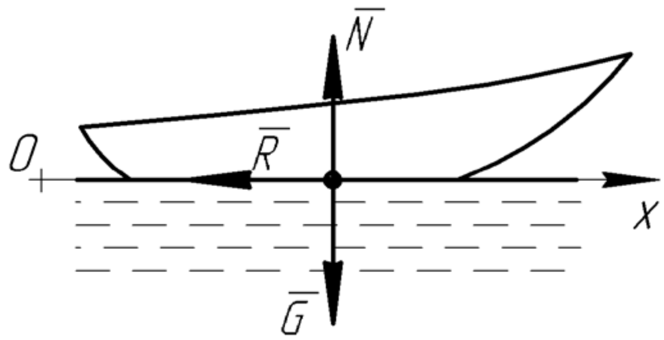


Рис. 2.6

Решение:

На лодку действуют сила тяжести $\overline{G}$, выталкивающая (архимедова) сила $\overline{N}$ и сила сопротивления $\overline{R}$, направленная против движения и зависящая от скорости лодки (рис. 2.6).

Составим дифференциальное уравнение движения лодки:

$$m\frac{d\upsilon_x}{dt} = -R \quad \text{или} \quad m\frac{d\upsilon}{dt} = -\mu\upsilon. \tag{2.93}$$

Разделим переменные и проинтегрируем уравнение, беря от обоих его частей соответствующие определенные интегралы. При этом нижним пределом каждого из интегралов будет значение переменного интегрирования в начальный момент, а верхним – значение того же переменного в произвольный момент времени:

$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon} \frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\frac{\mu}{m}\int_0^t dt\,, \qquad (2.94)$$

$$\ln\upsilon - \ln\upsilon_0 = -\frac{\mu}{m}t\,. \qquad (2.95)$$

Отсюда окончательно:

$$t = \frac{m}{\mu}\ln\frac{\upsilon_0}{\upsilon}\,. \qquad (2.96)$$

Определим за какое время скорость лодки уменьшится втрое. Для этого в полученное уравнение подставим $t = t_1$, $\upsilon = \upsilon_0/3$:

$$t_1 = \frac{m}{\mu}\ln 3\,. \qquad (2.97)$$

С учетом числовых значений величин:

$$t_1 = \frac{50}{9{,}1}\cdot 1{,}1 = 6{,}04\ c\,. \qquad (2.98)$$

Для определения пути используем в уравнении (2.93) подстановку $d\upsilon/dt = \upsilon\, d\upsilon/dx$:

$$m\upsilon\frac{d\upsilon}{dx} = -\mu\upsilon \quad \text{или} \quad m\frac{d\upsilon}{dx} = -\mu\,. \qquad (2.99)$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon} d\upsilon = -\frac{\mu}{m}\int_0^x dx\,, \qquad (2.100)$$

$$\upsilon - \upsilon_0 = -\frac{\mu}{m}x\,. \qquad (2.101)$$

Отсюда найдем выражение для определения пути:

$$x = \frac{m}{\mu}\left(\upsilon_0 - \upsilon\right). \qquad (2.102)$$

Когда скорость лодки будет $\upsilon_0/3$, пройденный ею путь s_1 составит:

$$s_1 = \frac{m}{\mu}\left(\upsilon_0 - \frac{\upsilon_0}{3}\right) = \frac{2}{3}\upsilon_0\frac{m}{\mu}\,. \qquad (2.103)$$

Путь s_2, пройденный лодкой до остановки, т.е. до момента, когда $\upsilon = 0$:

$$s_2 = \upsilon_0\frac{m}{\mu}\,. \qquad (2.104)$$

Подставив числовые значения, найдем:

$$s_1 = \frac{2}{3}\cdot 1\cdot\frac{50}{9{,}1} = 3{,}66\ м\,, \quad s_2 = 1\cdot\frac{50}{9{,}1} = 5{,}49\ м\,. \qquad (2.105)$$

Задача 2.8. Лыжник массой m совершает из состояния покоя спуск, двигаясь по прямолинейному участку длиной $AB = l$, который расположен под углом α к горизонту. Затем движение происходит по дуге BC окружности радиуса r с центральным углом, равным 2α. Прямолинейный участок AB является касательной к дуге окружности в точке B. Определить скорость лыжника и давление его на снег в точках B и C, а также в середине дуги

BC – точке D. Сила сопротивления движению на прямолинейном участке пропорциональна квадрату скорости и по модулю $R = k^2 m\upsilon^2$, где m – масса лыжника, k – постоянный коэффициент. При движении по дуге силами сопротивления пренебречь. Лыжника считать точечной массой.

Решение:

1) При движении лыжника на прямолинейном участке AB на него действуют сила тяжести $\overline{G}$, нормальная реакция $\overline{N}$ поверхности и сила сопротивления $\overline{R}$, пропорциональная квадрату скорости (рис. 2.7).

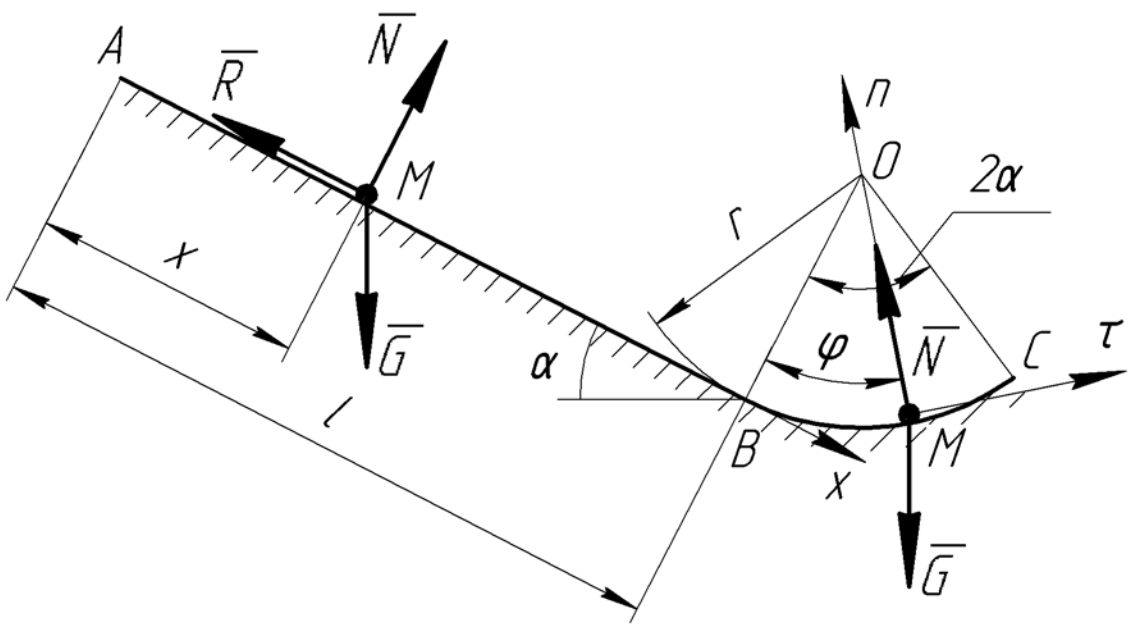


Рис. 2.7

Дифференциальное уравнение движения лыжника на участке AB будет иметь вид:

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = G\sin\alpha - R, \tag{2.106}$$

или, используя подстановку $d\upsilon/dt = \upsilon\, d\upsilon/dx$:

$$\upsilon\frac{d\upsilon}{dx} = g\sin\alpha - k^2\upsilon^2. \tag{2.107}$$

Разделяя переменные, получим:

$$\frac{\upsilon d\upsilon}{g\sin\alpha - k^2\upsilon^2} = dx. \qquad (2.108)$$

Обозначим $g\sin\alpha - k^2\upsilon^2 = u$, тогда:

$$du = -2k^2\upsilon d\upsilon, \quad \upsilon d\upsilon = -\frac{du}{2k^2}. \qquad (2.109)$$

Подставим полученные выражения в дифференциальное уравнение и проинтегрируем его:

$$-\frac{1}{2k^2}\int\frac{du}{u} = \int dx, \qquad (2.110)$$

$$-\frac{1}{2k^2}\ln u = x + C_1. \qquad (2.111)$$

С учетом введенных обозначений:

$$-\frac{1}{2k^2}\ln\left(g\sin\alpha - k^2\upsilon^2\right) = x + C_1. \qquad (2.112)$$

Подставим сюда начальные условия (в точке A $\upsilon = 0$, $x = 0$), и найдем постоянную интегрирования C_1:

$$C_1 = -\frac{1}{2k^2}\ln\left(g\sin\alpha\right). \qquad (2.113)$$

Тогда уравнение (2.112) примет вид:

$$-\frac{1}{2k^2}\ln\left(g\sin\alpha - k^2\upsilon^2\right) = x - \frac{1}{2k^2}\ln\left(g\sin\alpha\right), \qquad (2.114)$$

или

$$\ln\frac{g\sin\alpha - k^2\upsilon^2}{g\sin\alpha} = -2k^2x. \qquad (2.115)$$

Потенцируя последнее уравнение, получим:

$$\frac{g\sin\alpha - k^2\upsilon^2}{g\sin\alpha} = e^{-2k^2x}, \qquad (2.116)$$

откуда найдем закон изменения скорости в зависимости от координаты x:

$$\upsilon = \frac{1}{k}\sqrt{g\sin\alpha\left(1 - e^{-2k^2x}\right)}. \qquad (2.117)$$

В точке B, когда $x = l$, скорость составит:

$$\upsilon_B = \frac{1}{k}\sqrt{g\sin\alpha\left(1 - e^{-2k^2l}\right)}. \qquad (2.118)$$

2) Теперь рассмотрим движение лыжника по дуге BC. Скорость υ_B для этого участка будет являться начальной скоростью. На лыжника действуют сила тяжести $\overline{G}$ и нормальная реакция $\overline{N}$ (рис. 2.7). Проведем естественные оси и составим дифференциальные уравнения движения в проекциях на эти оси:

$$m\frac{d\upsilon}{dt}=G\sin(\alpha-\varphi), \quad (2.119)$$

$$m\frac{\upsilon^2}{r}=N-G\cos(\alpha-\varphi). \quad (2.120)$$

где φ – угловая координата (угол поворота радиуса *OM* из начального положения).

Скорость лыжника при движении по дуге:

$$\upsilon=\dot{\varphi}r, \quad (2.121)$$

где $\dot{\varphi}$ – угловая скорость вращения радиуса *OM*.

Тогда уравнение (2.119) примет вид:

$$\frac{d}{dt}(\dot{\varphi}r)=g\sin(\alpha-\varphi), \quad (2.122)$$

или

$$\ddot{\varphi}r=g\sin(\alpha-\varphi). \quad (2.123)$$

Домножим обе части полученного уравнения на $d\varphi$:

$$\ddot{\varphi}rd\varphi=g\sin(\alpha-\varphi)d\varphi. \quad (2.124)$$

Для того чтобы проинтегрировать такое уравнение, выполним подстановку:

$$\ddot{\varphi}d\varphi=\frac{d\dot{\varphi}}{dt}d\varphi=\dot{\varphi}d\dot{\varphi}. \quad (2.125)$$

Тогда

$$\dot{\varphi}d\dot{\varphi}=\frac{g}{r}\sin(\alpha-\varphi)d\varphi, \quad (2.126)$$

$$\int\dot{\varphi}d\dot{\varphi}=\frac{g}{r}\int\sin(\alpha-\varphi)d\varphi, \quad (2.127)$$

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2}=\frac{g}{r}\cos(\alpha-\varphi)+C_2. \quad (2.128)$$

В начальном положении:

$$\varphi=0, \quad \dot{\varphi}=\frac{\upsilon_B}{r}=\frac{1}{kr}\sqrt{g\sin\alpha\left(1-e^{-2k^2l}\right)}. \quad (2.129)$$

Подставим эти значения в уравнение (2.128):

$$\frac{1}{2k^2r^2}\cdot g\sin\alpha\left(1-e^{-2k^2l}\right)=\frac{g}{r}\cos\alpha+C_2, \quad (2.130)$$

откуда определим постоянную C_2:

$$C_2=\frac{g\sin\alpha}{2k^2r^2}\left(1-e^{-2k^2l}\right)-\frac{g}{r}\cos\alpha. \quad (2.131)$$

Тогда уравнение (2.128) примет вид:

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2}=\frac{g}{r}\left[\cos(\alpha-\varphi)-\cos\alpha\right]+\frac{g\sin\alpha}{2k^2r^2}\left(1-e^{-2k^2l}\right). \quad (2.132)$$

Учитывая, что $\dot{\varphi} = \upsilon / r$, найдем уравнение скорости лыжника на дуге BC:

$$\upsilon = \sqrt{2rg\left[\cos(\alpha - \varphi) - \cos\alpha\right] + \frac{g\sin\alpha}{k^2}\left(1 - e^{-2k^2 l}\right)}. \qquad (2.133)$$

Скорость лыжника в точке D ($\varphi = \alpha$) и в точке C ($\varphi = 2\alpha$) соответственно составят:

$$\upsilon_D = \sqrt{2rg(1 - \cos\alpha) + \frac{g\sin\alpha}{k^2}\left(1 - e^{-2k^2 l}\right)}, \qquad (2.134)$$

$$\upsilon_C = \frac{1}{k}\sqrt{g\sin\alpha\left(1 - e^{-2k^2 l}\right)}. \qquad (2.135)$$

Давление лыжника на снег найдем из уравнения (2.120):

$$N = m\left[g\cos(\alpha - \varphi) + \frac{\upsilon^2}{r}\right]. \qquad (2.136)$$

Найдем значения давления в точках B, D и C.

В точке B ($\varphi = 0$, $\upsilon = \upsilon_B$):

$$N_B = mg\left[\cos\alpha + \frac{\sin\alpha}{k^2 r}\cdot\left(1 - e^{-2k^2 l}\right)\right]. \qquad (2.137)$$

В точке D ($\varphi = \alpha$, $\upsilon = \upsilon_D$):

$$N_D = mg\left[3 - 2\cos\alpha + \frac{\sin\alpha}{rk^2}\left(1 - e^{-2k^2 l}\right)\right]. \qquad (2.138)$$

В точке C ($\varphi = 2\alpha$, $\upsilon = \upsilon_C$):

$$N_C = mg\left[\cos\alpha + \frac{\sin\alpha}{k^2 r}\left(1 - e^{-2k^2 l}\right)\right]. \qquad (2.139)$$

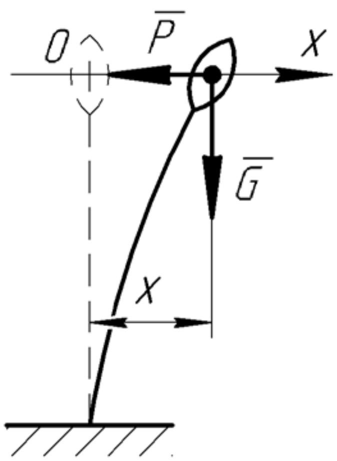


Рис. 2.8

Задача 2.9. Определить закон движения колоска на стебле, заменяя стебель упругим невесомым стержнем с грузом массы m на конце. При отклонении стержня от вертикального положения на груз действует сила $P = -cx$, где x – величина отклонения груза (рис. 2.8), c – коэффициент пропорциональности. Груз отклонили на величину a и отпустили без начальной скорости. Массой стержня пренебречь.

Решение:

На груз будут действовать сила тяжести $\overline{G}$ и сила $\overline{P}$, пропорциональная расстоянию x (рис. 2.8). Проведем ось x, совместив начало координат с положением груза до отклонения.

Тогда начальные условия движения груза:

$$t = 0,\quad x = a,\quad \upsilon_x = 0. \tag{2.140}$$

Дифференциальное уравнение движения груза:

$$m\frac{d\upsilon_x}{dt} = -cx, \tag{2.141}$$

или, используя подстановку $d\upsilon_x/dt = \upsilon_x\, d\upsilon_x/dx$:

$$m\upsilon_x\frac{d\upsilon_x}{dx} = -cx. \tag{2.142}$$

Разделив переменные и обозначив $k^2 = c/m$, получим:

$$\upsilon_x d\upsilon_x = -k^2 x dx. \tag{2.143}$$

Проинтегрируем это выражение:

$$\int \upsilon_x d\upsilon_x = -k^2 \int x dx, \tag{2.144}$$

$$\frac{\upsilon_x^2}{2} = -\frac{k^2 x^2}{2} + C_1. \tag{2.145}$$

После подстановки начальных условий (2.140) найдем, что $C_1 = k^2 a^2$. Тогда уравнение (2.145) примет вид:

$$\upsilon_x^2 = k^2\left(a^2 - x^2\right), \tag{2.146}$$

откуда скорость груза

$$\upsilon_x = \pm k\sqrt{a^2 - x^2}. \tag{2.147}$$

В рассматриваемый момент времени груз движется к началу координат, т.е. вектор скорости будет направлен противоположно направлению оси x. Следовательно

$$\upsilon_x = -k\sqrt{a^2 - x^2}. \tag{2.148}$$

Учитывая, что $\upsilon_x = dx/dt$, запишем:

$$\frac{dx}{dt} = -k\sqrt{a^2 - x^2}. \tag{2.149}$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\int\left(-\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right) = k\int dt, \tag{2.150}$$

$$\arccos\frac{x}{a} = kt + C_2. \tag{2.151}$$

Подставляя сюда начальные условия (2.140), найдем, что $C_2 = 0$. Тогда:

$$\arccos\frac{x}{a} = kt, \tag{2.152}$$

$$\frac{x}{a} = \cos kt, \tag{2.153}$$

$$x = a\cos kt. \tag{2.154}$$

Таким образом, грузик будет совершать гармонические колебания с амплитудой a и периодом $T = 2\pi/k = 2\pi\sqrt{m/c}$.

Задача 2.10. Материальная точка M движется в вертикальной плоскости под действием центральной силы притяжения, пропорциональной ее расстоянию до неподвижного центра: $\overline{F} = -k^2 m\overline{r}$, где $\overline{r}$ – радиус-вектор точки, m – масса точки, k – постоянный коэффициент.

Найти закон движения точки и ее траекторию, если в начальный момент она занимала положение $M_0\left(0,\ g/k^2\right)$ и имела скорость υ_0, направленную горизонтально (рис. 2.9).

Решение:

1. Найдем уравнения движения точки M.

На точку действуют сила тяжести $\overline{G}$ и сила $\overline{F}$, пропорциональная расстоянию $r = OM$ (рис. 2.9).

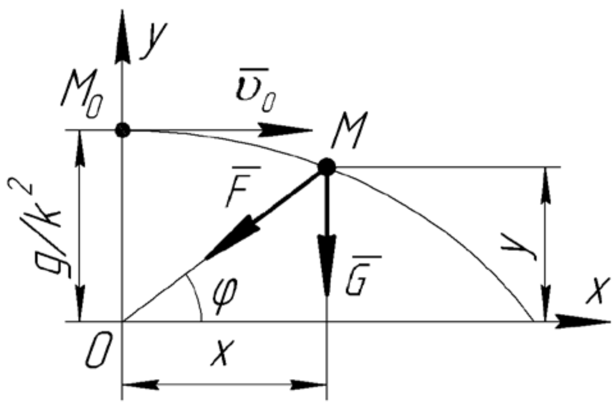


Рис. 2.9

Начальные условия движения точки:

$$\left.\begin{array}{l} t = 0, \\ x = 0,\ \ y = g/k^2, \\ \upsilon_x = \dot{x} = \upsilon_0, \\ \upsilon_y = \dot{y} = 0. \end{array}\right\} \qquad (2.155)$$

Составим дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на координатные оси:

Учитывая, что $r\cos\varphi = x$, $r\sin\varphi = y$, получим:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \qquad (2.158)$$

$$\ddot{y} + k^2 y = -g. \qquad (2.159)$$

Для решения уравнения (2.158) используем подстановку $x = e^{rt}$, $\ddot{x} = r^2 e^{rt}$:

$$r^2 e^{rt} + k^2 e^{rt} = 0. \qquad (2.160)$$

Отсюда характеристическое уравнение:

$$r^2 + k^2 = 0. \qquad (2.161)$$

Корни этого уравнения $r_{1,2} = \pm k$ – мнимые. Тогда общее решение уравнения (2.158) ищем в виде:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \qquad (2.162)$$

Продифференцируем это уравнение:

$$\dot{x} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt\,. \tag{2.163}$$

Найдем постоянные интегрирования C_1 и C_2. Для этого в уравнения (2.162) и (2.163) подставим начальные условия (2.155). Тогда:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{\upsilon_0}{k}. \tag{2.164}$$

С учетом постоянных:

$$x = \frac{\upsilon_0}{k} \sin kt\,. \tag{2.165}$$

Общее решение уравнения (2.159) будет иметь вид:

$$y = y_1 + y_2, \tag{2.166}$$

где $y_1 = C_3 \cos kt + C_4 \sin kt$ – общее решение однородного уравнения;

y_2 – частное решение неоднородного уравнения; будем искать в виде $y_2 = A$.

После подстановки в уравнение (2.159) $y = A$ и $\ddot{y} = 0$, получим:

$$A = -\frac{g}{k^2}. \tag{2.167}$$

Тогда уравнение (2.166) примет вид:

$$y = C_3 \cos kt + C_4 \sin kt - \frac{g}{k^2}. \tag{2.168}$$

Продифференцируем это уравнение:

$$\dot{y} = -kC_3 \sin kt + kC_4 \cos kt\,. \tag{2.169}$$

Подставляя в уравнения (2.168) и (2.169) начальные условия (2.155), найдем постоянные интегрирования:

$$C_3 = \frac{2g}{k^2}, \quad C_4 = 0. \tag{2.170}$$

Тогда с учетом постоянных:

$$y = \frac{2g}{k^2} \cos kt - \frac{g}{k^2} \quad \text{или} \quad y = \frac{g}{k^2}\left(2\cos kt - 1\right). \tag{2.171}$$

2. Найдем закон движения точки и определим ее траекторию.

Ранее были найдены уравнения движения точки:

$$x = \frac{\upsilon_0}{k} \sin kt, \quad y = \frac{g}{k^2}\left(2\cos kt - 1\right). \tag{2.172}$$

Выразим из этих уравнений:

$$\sin kt = \frac{k}{\upsilon_0} x, \quad \cos kt = \frac{k^2}{2g}\left(y + \frac{g}{k^2}\right). \tag{2.173}$$

Возведем обе части полученных выражений в квадрат и сложим:

$$\frac{x^2}{\left(\upsilon_0 / k\right)^2} + \frac{\left(y + g/k^2\right)^2}{\left(2g/k^2\right)^2} = 1. \tag{2.174}$$

Найденный закон движения точки M является уравнением эллипса с полуосями $a = \upsilon_0/k$, $b = 2g/k^2$ и центром в точке с координатами $\left(0,\ -g/k^2\right)$.

Задача 2.11. Определить скорость υ схода зерна с ленты метателя (рис. 2.10) при обхвате лентой барабана-катушки на угол $\alpha = \pi/2$, если коэффициент трения зерна о ленту составляет $f = 0{,}36$. Начальная скорость поступления зерна из бункера в метатель равна $\upsilon_0 = 11{,}5$ *м/с*, радиус барабана $R = 0{,}5$ *м*.

Решение:

Рассмотрим одно зернышко, принимая его за материальную точку.

К точке будут приложены сила тяжести $\overline{G}$, сила трения $\overline{F}_{тр}$ и нормальная реакция $\overline{N}$ (рис. 2.10).

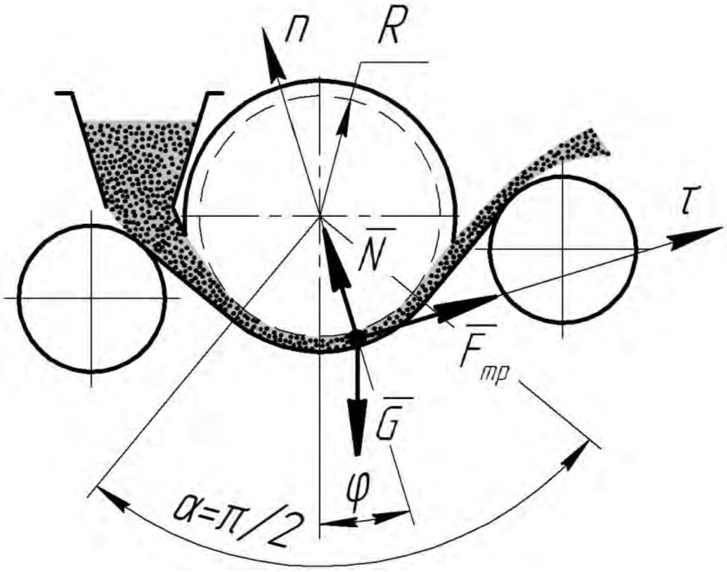


Рис. 2.10

Т.к. движение точки происходит по дуге окружности, то проведем естественные оси и составим дифференциальные уравнения в проекции на эти оси:

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = F_{тр} - G\sin\varphi, \qquad (2.175)$$

$$m\frac{\upsilon^2}{\rho} = N - G\cos\varphi. \qquad (2.176)$$

Из уравнения (2.176) найдем нормальную реакцию:

$$N = m\frac{\upsilon^2}{\rho} + mg\cos\varphi. \qquad (2.177)$$

По закону Кулона определим силу трения:

$$F_{тр} = fN = fm\frac{\upsilon^2}{R} + fmg\cos\varphi, \qquad (2.178)$$

и подставим в уравнение (2.175):

$$\frac{d\upsilon}{dt} = g\left(f\cos\varphi - \sin\varphi\right) + f\frac{\upsilon^2}{R}. \qquad (2.179)$$

Перейдем от переменной t к переменной φ. Т.к. длина дуги $ds = \upsilon \cdot dt = R \cdot d\varphi$, следовательно

$$dt = \frac{R \cdot d\varphi}{\upsilon}. \qquad (2.180)$$

Тогда уравнение (2.179) примет вид:

$$\frac{\upsilon d\upsilon}{Rd\varphi} = g\left(f\cos\varphi - \sin\varphi\right) + f\frac{\upsilon^2}{R}. \qquad (2.181)$$

Разделив обе части уравнений на υ и домножив на R, получим:

$$\frac{d\upsilon}{d\varphi} - f\upsilon = \frac{gR\left(f\cos\varphi - \sin\varphi\right)}{\upsilon}. \qquad (2.182)$$

Переменную υ представим в виде $\upsilon = u \cdot t$, где u – новая переменная. Тогда:

$$\frac{d\upsilon}{d\varphi} = t \cdot \frac{du}{d\varphi} + u \cdot \frac{dt}{d\varphi}, \qquad (2.183)$$

а дифференциальное уравнение (2.182) примет вид:

$$t \cdot \frac{du}{d\varphi} + u \cdot \frac{dt}{d\varphi} - f \cdot u \cdot t = \frac{gR\left(f\cos\varphi - \sin\varphi\right)}{u \cdot t}. \qquad (2.184)$$

Величину u найдем из условия $t \cdot \left(\frac{du}{d\varphi} - f \cdot u\right) = 0$ в следующем порядке:

$$\frac{du}{d\varphi} - f \cdot u = 0, \qquad (2.185)$$

$$\frac{du}{d\varphi} = f \cdot u, \qquad (2.186)$$

$$\int_0^u \frac{du}{u} = f \cdot \int_0^\varphi d\varphi, \qquad (2.187)$$

$$\ln u = f \cdot \varphi, \qquad (2.188)$$

откуда

$$u = e^{f \cdot \varphi}. \qquad (2.189)$$

Тогда из уравнения (2.184) для определения величины t получим выражение:

$$u\cdot\frac{dt}{d\varphi}=\frac{gR\left(f\cos\varphi-\sin\varphi\right)}{u\cdot t},\tag{2.190}$$

или

$$e^{f\cdot\varphi}\cdot\frac{dt}{d\varphi}=\frac{gR\left(f\cos\varphi-\sin\varphi\right)}{e^{f\cdot\varphi}\cdot t}.\tag{2.191}$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\int tdt=gR\int\left(f\cos\varphi-\sin\varphi\right)\cdot e^{-2f\cdot\varphi}d\varphi,\tag{2.192}$$

$$\frac{t^2}{2}=gR\left[f\cdot\int\cos\varphi\cdot e^{-2f\cdot\varphi}d\varphi-\int\sin\varphi\cdot e^{-2f\cdot\varphi}d\varphi\right]+\frac{C}{2}.\tag{2.193}$$

Первый интеграл в правой части уравнения (2.193) находим с помощью замены переменных. Применим подстановку:

$$e^{-2f\cdot\varphi}=q,\quad \cos\varphi d\varphi=dp,\tag{2.194}$$

откуда

$$dq=-2f\cdot e^{-2f\cdot\varphi}d\varphi,\quad p=\sin\varphi.\tag{2.195}$$

Тогда:

$$\int e^{-2f\cdot\varphi}\cdot\cos\varphi d\varphi=\int q\cdot dp=q\cdot p-\int p\cdot dq,\tag{2.196}$$

и первый интеграл в уравнении (2.193) будет равен:

$$\int e^{-2f\cdot\varphi}\cdot\cos\varphi d\varphi=e^{-2f\cdot\varphi}\sin\varphi+2f\int e^{-2f\cdot\varphi}\sin\varphi d\varphi.\tag{2.197}$$

Подставим найденное выражение в исходное уравнение (2.193):

$$\frac{t^2}{2}=gR\left[f\cdot e^{-2f\cdot\varphi}\sin\varphi+2f^2\int e^{-2f\cdot\varphi}\sin\varphi d\varphi-\int e^{-2f\cdot\varphi}\cdot\sin\varphi d\varphi\right]+\frac{C}{2},\tag{2.198}$$

$$\frac{t^2}{2}=gR\left[f\cdot e^{-2f\cdot\varphi}\sin\varphi+\left(2f^2-1\right)\int e^{-2f\cdot\varphi}\sin\varphi d\varphi\right]+\frac{C}{2}.\tag{2.199}$$

Для второго интеграла вводим новые переменные:

$$e^{-2f\cdot\varphi}=q_1,\quad \sin\varphi d\varphi=dp_1,\tag{2.200}$$

$$dq_1=-2f\cdot e^{-2f\cdot\varphi}d\varphi,\quad p_1=-\cos\varphi.\tag{2.201}$$

Тогда:

$$\begin{aligned}\int e^{-2f\cdot\varphi}\cdot\sin\varphi d\varphi&=\int q_1\cdot dp_1=q_1\cdot p_1-\int p_1\cdot dq_1=\\&=-e^{-2f\cdot\varphi}\cos\varphi-2f\int e^{-2f\cdot\varphi}\cos\varphi d\varphi.\end{aligned}\tag{2.202}$$

С учетом выражения (2.197):

$$\int e^{-2f\cdot\varphi}\cdot\sin\varphi d\varphi=-e^{-2f\cdot\varphi}\cos\varphi-2f\cdot e^{-2f\cdot\varphi}\sin\varphi-4f^2\int e^{-2f\cdot\varphi}\sin\varphi d\varphi,\tag{2.203}$$

откуда второй интеграл будет равен:

$$\int e^{-2f\cdot\varphi}\cdot\sin\varphi d\varphi=-\frac{e^{-2f\cdot\varphi}\left(\cos\varphi+2f\cdot\sin\varphi\right)}{1+4f^2}.\tag{2.204}$$

Подставим найденное значение в уравнение (2.199):

$$\frac{t^2}{2}=gR\left[f\cdot e^{-2f\cdot\varphi}\sin\varphi+\left(1-2f^2\right)\frac{e^{-2f\cdot\varphi}\left(\cos\varphi+2f\cdot\sin\varphi\right)}{1+4f^2}\right]+\frac{C}{2},\tag{2.205}$$

откуда:

$$t^2 = 2gR \cdot e^{-2f\cdot\varphi} \cdot \left[f \cdot \sin\varphi + \frac{\left(1-2f^2\right)\cdot\left(\cos\varphi + 2f \cdot \sin\varphi\right)}{1+4f^2} \right] + C, \quad (2.206)$$

$$t = \sqrt{2gR \cdot e^{-2f\cdot\varphi} \cdot \frac{3f \cdot \sin\varphi + \cos\varphi\left(1-2f^2\right)}{1+4f^2} + C}. \quad (2.207)$$

Тогда скорость точки равна:

$$\upsilon = u \cdot t = e^{f\cdot\varphi} \sqrt{2gR \cdot e^{-2f\cdot\varphi} \cdot \frac{3f \cdot \sin\varphi + \cos\varphi\left(1-2f^2\right)}{1+4f^2} + C}. \quad (2.208)$$

Подставим в уравнение (2.208) начальные условия ($t = 0$, $\varphi = 0$, $\upsilon = \upsilon_0$):

$$\upsilon_0 = \sqrt{2gR \cdot \frac{1-2f^2}{1+4f^2} + C}, \quad (2.209)$$

и находим постоянную интегрирования C:

$$C = \upsilon_0^2 - 2gR \cdot \frac{1-2f^2}{1+4f^2}. \quad (2.210)$$

Выполнив необходимые преобразования, и обозначив:

$$k = 2 \cdot \frac{e^{-2f\cdot\varphi}\left[3f \cdot \sin\varphi + \cos\varphi\left(1-2f^2\right)\right] - \left(1-2f^2\right)}{1+4f^2}, \quad (2.211)$$

формулу для определения скорости запишем в виде:

$$\upsilon = e^{f\cdot\varphi}\sqrt{k \cdot g \cdot R + \upsilon_0^2}. \quad (2.212)$$

При вылете зерна из метателя $\varphi = \alpha = \pi/2$. Тогда для заданных значений:

$$f = 0{,}36, \quad \upsilon_0 = 11{,}5 \text{ м/с}, \quad R = 0{,}5 \text{ м}, \quad (2.213)$$

получим:

$$k = 2 \cdot \frac{e^{-2\cdot 0{,}36\cdot\pi/2} \cdot 3 \cdot 0{,}36 \cdot 1 - \left(1 - 2 \cdot 0{,}36^2\right)}{1 + 4 \cdot 0{,}36^2} = -0{,}517, \quad (2.214)$$

$$\upsilon = e^{0{,}36\cdot\pi/2}\sqrt{-0{,}517 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5 + 11{,}5^2} = 20{,}05 \text{ м/с}. \quad (2.215)$$

3 СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОЧКИ

Свободные колебания возникают при воздействии на точку *M* одной только восстанавливающей силы $\overline{F}$, направленной к неподвижному центру *O* и пропорциональной расстоянию от этого центра (рис. 3.1).

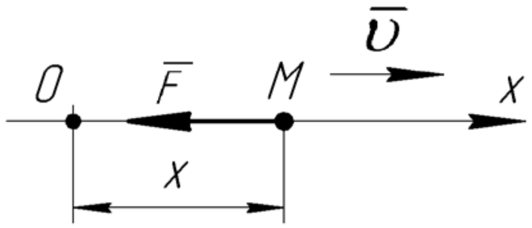


Рис. 3.1

Проекция силы $\overline{F}$ на ось *x*:

где *c* – коэффициент пропорциональности.

Дифференциальное уравнение движения в проекции на ось *x*:

Обозначив здесь $c/m = k^2$, получим дифференциальное уравнение свободных колебаний точки:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0. \tag{3.3}$$

Характеристическое уравнение будет иметь вид:

$$r^2 + k^2 = 0, \tag{3.4}$$

а его корни будут чисто мнимыми:

$$r_{1,2} = \pm ik. \tag{3.5}$$

Тогда решение уравнения (3.3) имеет вид:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \tag{3.6}$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования.

Если в момент времени $t = 0$ $x = x_0$, $\upsilon = \upsilon_0$, то:

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \upsilon_0 / k, \tag{3.7}$$

а *уравнение свободных колебаний* (3.6) окончательно будет выглядеть:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\upsilon_0}{k} \sin kt, \tag{3.8}$$

где *k* – круговая частота колебаний, с$^{-1}$ (рад/с).

Если в уравнении (3.6) вместо постоянных C_1 и C_2 ввести постоянные *A* и α, такие что:

$$C_1 = A \sin\alpha, \quad C_2 = A \cos\alpha, \tag{3.9}$$

то получим:

$$x = A \sin(kt + \alpha), \tag{3.10}$$

где *A* – амплитуда колебаний, м;

α – начальная фаза колебаний, рад.

Решая совместно (3.7) и (3.9), найдем:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\upsilon_0^2}{k^2}}, \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{x_0 k}{\upsilon_0}. \tag{3.11}$$

Период колебаний – это время, в течение которого точка совершит одно полное колебание. Он равен:

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}. \qquad (3.12)$$

Вертикальные колебания груза. При колебаниях груза, подвешенного на пружине, сила упругости будет являться восстанавливающей силой. Ее проекция на ось x:

$$F_x = -cx, \qquad (3.13)$$

где c – коэффициент жесткости пружины, Н/м.

Коэффициент жесткости показывает, какую нужно приложить к пружине силу, чтобы удлинить ее на 1 *м*.

Сила тяжести груза, не изменяя характера колебаний, смещает центр колебаний в сторону действия силы (*т.е. вниз*) *на величину статического отклонения* $\lambda_{ст}$. Таким образом, подставляя $x_0 = -\lambda_{ст}$ в уравнение (3.8), получим закон вертикальных колебаний груза:

$$x = -\lambda_{ст}\cos kt + \frac{\upsilon_0}{k}\sin kt, \qquad (3.14)$$

где $\lambda_{ст}$ и k можем найти по формулам:

$$\lambda_{ст} = \frac{mg}{c}, \quad k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\lambda_{ст}}}. \qquad (3.15)$$

Период вертикальных колебаний груза:

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{\lambda_{ст}}{g}}. \qquad (3.16)$$

Чтобы найти период колебаний груза, подвешенного на двух пружинах с коэффициентами жесткости c_1 и c_2, вначале определяют *приведенный коэффициент жесткости* $c_{экв}$, т.е. коэффициент жесткости пружины, эквивалентной двум данным.

В случае последовательного соединения пружин (рис. 3.2, *а*), приведенный коэффициент жесткости найдем из формулы:

$$c_{экв} = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}. \qquad (3.17)$$

Период колебаний груза в этом случае будет:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c_{экв}}} = 2\pi\sqrt{m\frac{c_1 + c_2}{c_1 c_2}}. \qquad (3.18)$$

Если пружины соединены, как показано на

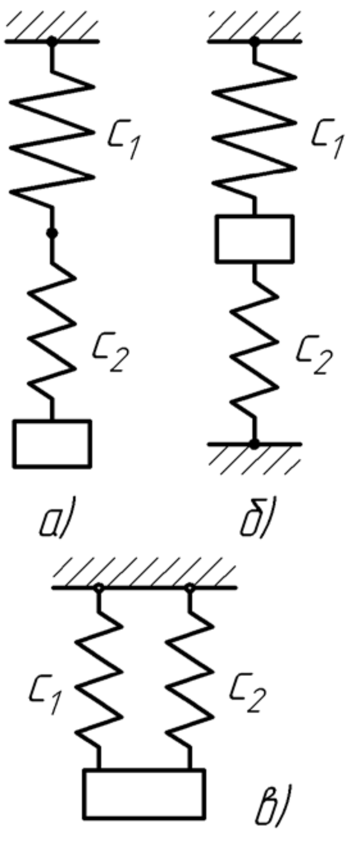


Рис. 3.2

рис. 3.2, *б*, то приведенный коэффициент жесткости:

$$c_{экв} = c_1 + c_2 , \qquad (3.19)$$

а период колебаний груза:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c_{экв}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c_1 + c_2}} . \qquad (3.20)$$

В случае параллельного соединения пружин (рис. 3.2, *в*), приведенный коэффициент жесткости находится по формуле:

$$c_{экв} = \frac{4c_1c_2}{c_1 + c_2} . \qquad (3.21)$$

Период колебаний груза в этом случае будет:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c_{экв}}} = \pi\sqrt{m\frac{c_1 + c_2}{c_1c_2}} . \qquad (3.22)$$

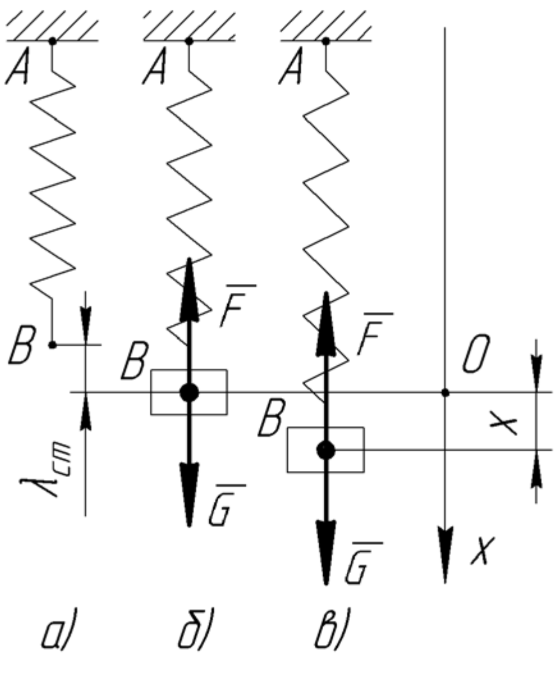


Рис. 3.3

Задача 3.1. Пружина *AB*, закрепленная одним концом в точке *A* (рис. 3.3, *а*), такова, что для удлинения ее на 1 *м* необходимо приложить в точке *B* при статической нагрузке силу 19,6 *Н*. В некоторый момент к нижнему концу *B* недеформированной пружины подвешивают гирю массы 0,1 *кг* и отпускают ее без начальной скорости. Пренебрегая массой пружины, написать уравнение дальнейшего движения гири и указать амплитуду и период ее колебаний, отнеся движение к оси, проведенной вертикально вниз из положения статического равновесия гири.

Решение:

К недеформированной пружине (рис. 3.3, *а*) подвешивают гирю, при этом пружина удлиняется на величину статического отклонения $\lambda_{ст}$ (рис. 3.3, *б*). В положении статического равновесия сила тяжести гири будет уравновешена силой упругости пружины, т.е.

$$G = F , \qquad (3.23)$$

или

$$mg = c\lambda_{ст} . \qquad (3.24)$$

Отсюда можем найти статическое отклонение:

$$\lambda_{ст} = \frac{mg}{c} = \frac{0,1 \cdot 9,8}{19,6} = 0,05\ м. \qquad (3.25)$$

Проведем вертикально вниз ось x, за начало координат примем положение статического равновесия гири (рис. 3.3).

При колебаниях гири на нее будут действовать сила тяжести $G = mg$ и сила упругости пружины $F = c\left(\lambda_{ст} + x\right)$ (рис. 3.3, *в*). Тогда дифференциальное уравнение движения в проекции на ось x будет иметь вид:

$$m\ddot{x} = mg - c\left(\lambda_{ст} + x\right). \qquad (3.26)$$

Раскроем скобки:

$$m\ddot{x} = mg - c\lambda_{ст} - cx. \qquad (3.27)$$

Из равенства (3.24):

$$mg - c\lambda_{ст} = 0.$$

Тогда, обозначив $c/m = k^2$, получим дифференциальное уравнение свободных колебаний гири:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0. \qquad (3.28)$$

Выполнив в уравнение (3.28) подстановку $x = e^{rt}$, $\ddot{x} = r^2 e^{rt}$, получим характеристическое уравнение:

$$r^2 + k^2 = 0, \qquad (3.29)$$

корни которого будут мнимыми:

$$r_{1,2} = \pm ik. \qquad (3.30)$$

Тогда решение уравнения (3.28) имеет вид:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \qquad (3.31)$$

Чтобы найти постоянные интегрирования C_1 и C_2, продифференцируем по времени уравнение (3.31):

$$\dot{x} = \upsilon = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt, \qquad (3.32)$$

и подставим начальные условия ($t = 0$, $x_0 = -\lambda_{ст}$, $\upsilon_0 = 0$) в равенства (3.31) и (3.32):

$$C_1 = -\lambda_{ст}, \quad C_2 = 0. \qquad (3.33)$$

Тогда уравнение вертикальных колебаний гири:

$$x = -\lambda_{ст} \cos kt. \qquad (3.34)$$

Круговая частота колебаний:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{19,6}{0,1}} = 14\ c^{-1}. \qquad (3.35)$$

Подставив значения $\lambda_{ст}$ и k в уравнение (3.34), окончательно получим:

$$x = -0,05\cos 14t,\ м. \qquad (3.36)$$

Период колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3{,}14}{14} = 0{,}45\ c. \tag{3.37}$$

Амплитуда колебаний:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\upsilon_0^2}{k^2}} = \lambda_{cm} = 0{,}05\ м. \tag{3.38}$$

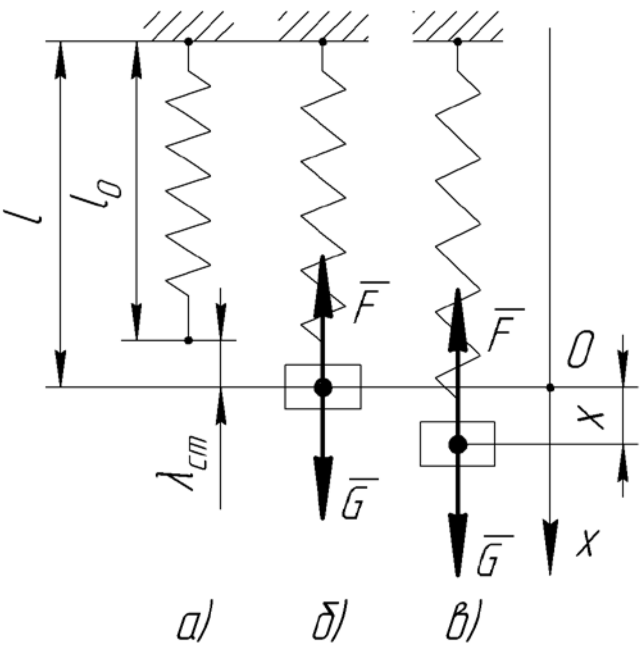


Рис. 3.4

Задача 3.2. Груз массой 0,1 *кг* подвесили к концу недеформированной пружины и толкнули вверх со скоростью 5 *м/с*. Длина недеформированной пружины $l_0 = 0{,}65\ м$ (рис. 3.4, *а*), а при равновесии груза на пружине ее длина равна $l = 0{,}85\ м$ (рис. 3.4, *б*). Пренебрегая массой пружины, определить уравнение дальнейшего движения груза, указать амплитуду и период ее колебаний, а также наибольшую силу упругости.

Решение:

Статическое отклонение найдем как разность длин пружины при статическом равновесии груза и в недеформированном состоянии:

$$\lambda_{cm} = l - l_0 = 0{,}85 - 0{,}65 = 0{,}2\ м. \tag{3.39}$$

Учитывая, что

$$\lambda_{cm} = \frac{mg}{c}, \tag{3.40}$$

найдем круговую частоту колебаний:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{c \cdot g}{m \cdot g}} = \sqrt{\frac{g}{\lambda_{cm}}} = \sqrt{\frac{9{,}8}{0{,}2}} = 7\ c^{-1}. \tag{3.41}$$

Чтобы найти уравнение колебаний груза, воспользуемся полученными в предыдущей задаче уравнениями (3.31) и (3.32), и подставим в них начальные условия ($t = 0$, $x_0 = -\lambda_{cm}$, $\upsilon = \upsilon_0$). Таким образом, мы определим постоянные интегрирования:

$$C_1 = -\lambda_{cm} = -0{,}2\ м, \quad C_2 = \frac{\upsilon_0}{k} = \frac{5}{7} = 0{,}71\ м. \tag{3.42}$$

Подставив все найденные значения в уравнение (3.31), получим уравнение колебаний груза:

$$x = -0{,}2\cos 7t + 0{,}71\sin 7t,\ \text{м}. \tag{3.43}$$

Период колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3{,}14}{7} = 0{,}897\ с\,. \tag{3.44}$$

Амплитуда колебаний:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\upsilon_0^2}{k^2}} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{\left(-0{,}2\right)^2 + 0{,}71^2} = 0{,}74\ м\,. \tag{3.45}$$

Найдем наибольшую силу упругости.

Сила упругости пружины при колебаниях груза (рис. 3.4, *в*):

$$F = c\left(\lambda_{ст} + x\right) = c\left(\lambda_{ст} - 0{,}2\cos 7t + 0{,}71\sin 7t\right). \tag{3.46}$$

Коэффициент упругости пружины найдем из формулы (3.13):

$$c = \frac{mg}{\lambda_{ст}} = \frac{0{,}1 \cdot 9{,}8}{0{,}2} = 4{,}9\ \ Н/м\,. \tag{3.47}$$

Максимальное значение сила упругости примет, когда $7t = \pi$:

$$\cos 7t = -1, \quad \sin 7t = 0\,, \tag{3.48}$$

$$F_{\max} = 4{,}9 \cdot \left(0{,}2 + 0{,}2\right) = 1{,}96\ Н\,. \tag{3.49}$$

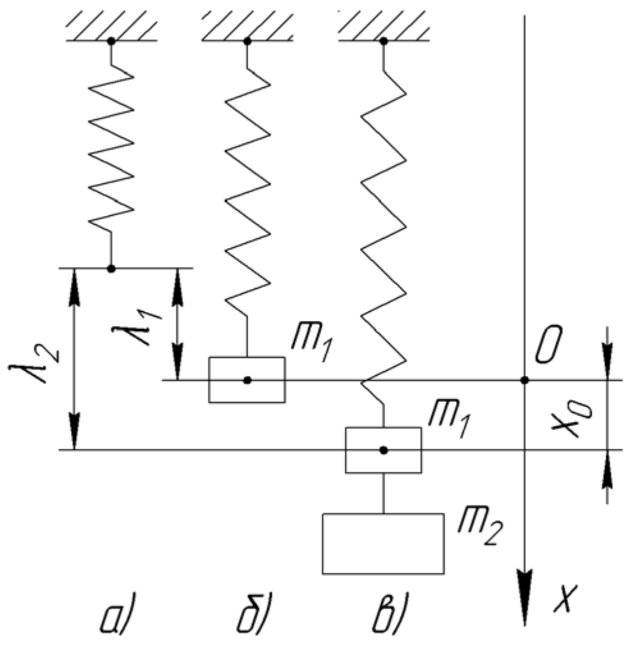


Рис. 3.5

Задача 3.3. К пружине, коэффициент жесткости которой равен $c = 19{,}6\ \ Н/м$, были подвешены два груза с массами $m_1 = 0{,}5\ кг$ и $m_2 = 0{,}8\ кг$. Система находилась в покое в положении статического равновесия, когда груз массой m_2 убрали. Найти уравнение движения оставшегося груза массой m_1, круговую частоту и период колебаний.

Решение:

При подвешивании к недеформированной пружине (рис. 3.5, *а*) груза массой m_1, пружина удлинится на величину λ_1 (рис. 3.5, *б*):

$$\lambda_1 = \frac{m_1 g}{c} = \frac{0{,}5 \cdot 9{,}8}{19{,}6} = 0{,}25\ м\,. \tag{3.51}$$

При подвешивании груза массой m_2 пружина удлинится от своего первоначального положения на величину λ_2 (рис. 3.5, *в*):

$$c\lambda_2 = \left(m_1 + m_2\right) g\,, \tag{3.52}$$

$$\lambda_2 = \frac{(m_1 + m_2)g}{c} = \frac{(0,5 + 0,8) \cdot 9,8}{19,6} = 0,65 \ м. \qquad (3.53)$$

Когда груз m_2 убрали, то груз массой m_1 начал колебания относительно положения своего статического равновесия. Таким образом, начальное отклонение груза будет представлять собой деформацию пружины под действием груза массой m_2:

$$x_0 = \lambda_2 - \lambda_1 = 0,65 - 0,25 = 0,4 \ м. \qquad (3.54)$$

Круговая частота колебаний груза массы m_1:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m_1}} = \sqrt{\frac{19,6}{0,5}} = 6,26 \ c^{-1}. \qquad (3.55)$$

Чтобы найти уравнение колебаний груза, воспользуемся полученными в **задаче 3.1** уравнениями (3.31) и (3.32), и подставим в них начальные условия ($t = 0$, $x = x_0$, $\upsilon_0 = 0$). Таким образом, мы определим постоянные интегрирования:

$$C_1 = x_0 = 0,4 \ м, \quad C_2 = 0. \qquad (3.56)$$

Подставив все найденные значения в уравнение (3.31), получим уравнение колебаний груза:

$$x = 0,4\cos 6,26t, \text{ м}. \qquad (3.57)$$

Период колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3,14}{6,26} = 1 \ c. \qquad (3.58)$$

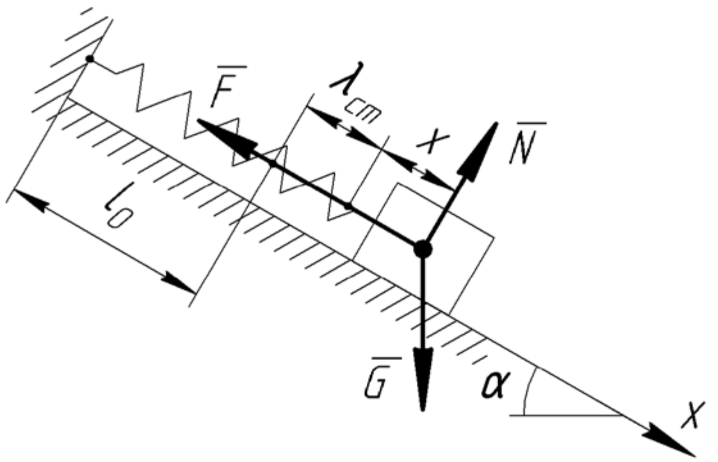


Рис. 3.6

Задача 3.4. Пружина расположена вдоль наклонной плоскости с углом α (рис. 3.6). К концу недеформированной пружины подвешено тело массой m и отпущено без начальной скорости. Определить наибольшую величину силы упругости.

Решение:

На тело, находящееся на наклонной плоскости и подвешенное к пружине будут действовать сила упругости пружины $\bar{F}$, сила тяжести $\bar{G}$ и нормальная реакция поверхности $\bar{N}$ (рис. 3.6, l_0 – длина пружины в недеформированном состоянии).

В положении статического равновесия сумма проекций сил на ось x будет равна нулю:

$$\sum X_k = -F + G\sin\alpha = 0, \tag{3.59}$$

откуда

$$c\lambda_{cm} = mg\sin\alpha, \tag{3.60}$$

где λ_{cm} – статическое отклонение.

При колебаниях пружины сила упругости будет равна:

$$F = c\left(\lambda_{cm} + x\right). \tag{3.61}$$

Тогда дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - c\left(\lambda_{cm} + x\right). \tag{3.62}$$

Учитывая равенство (3.60) и обозначив $c/m = k^2$, получим дифференциальное уравнение свободных колебаний точки:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0. \tag{3.63}$$

Решение уравнения ищем в виде:

$$x = C_1\cos kt + C_2\sin kt. \tag{3.64}$$

Продифференцируем уравнение (3.64):

$$\upsilon = \dot{x} = -kC_1\sin kt + kC_2\cos kt. \tag{3.65}$$

Подставляя в уравнения (3.64) и (3.65) начальные условия ($t = 0$, $x_0 = -\lambda_{cm}$, $\upsilon_0 = 0$), найдем постоянные интегрирования:

$$C_1 = -\lambda_{cm}, \quad C_2 = 0. \tag{3.66}$$

Тогда уравнение колебаний груза:

$$x = -\lambda_{cm}\cos kt. \tag{3.67}$$

Подставим выражение (3.67) в формулу (3.61):

$$F = c\left(\lambda_{cm} - \lambda_{cm}\cos kt\right) = c\lambda_{cm}\left(1 - \cos kt\right). \tag{3.68}$$

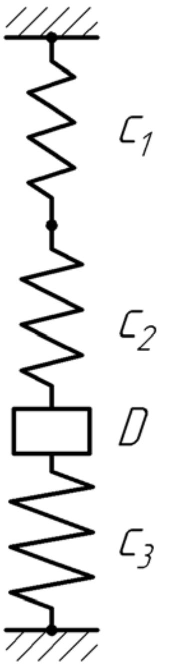


Рис. 3.7

Очевидно, что сила упругости принимает максимальное значение при $\cos kt = -1$:

$$F_{\max} = c\lambda_{cm}\left(1 + 1\right) = 2c\lambda_{cm}. \tag{3.69}$$

Учитывая, что из равенства (3.14):

$$\lambda_{cm} = \frac{mg\sin\alpha}{c}, \tag{3.70}$$

окончательно получим:

$$F_{\max} = 2c \cdot \frac{mg\sin\alpha}{c} = 2mg\sin\alpha. \tag{3.71}$$

Задача 3.5. Определить период вертикальных колебаний груза D массой m, подвешенного на трех пружинах, как показано на рис. 3.7, если коэффициенты жесткости $c_1 = c$, $c_2 = c$, $c_3 = 3c$.

Решение:

Найдем приведенный коэффициент жесткости верхних пружин. Т.к. они соединены последовательно, то:

$$c_{12} = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} = \frac{c \cdot 2c}{c + 2c} = \frac{2}{3}c. \qquad (3.72)$$

Приведенный коэффициент жесткости системы из трех пружин:

$$c_{экв} = c_{12} + c_3 = \frac{2}{3}c + 3c = \frac{11}{3}c. \qquad (3.73)$$

Тогда период колебаний:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c_{экв}}} = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{11c}}. \qquad (3.74)$$

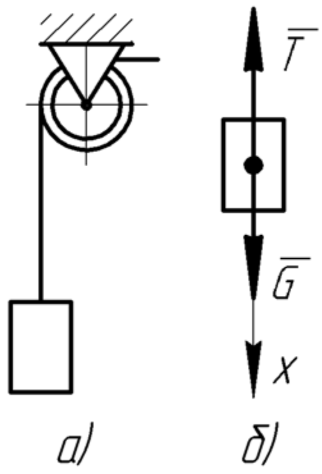


Рис. 3.8

Задача 3.6. При равномерном спуске груза массы $m = 2000$ *кг* со скоростью $\upsilon = 5$ *м/с* произошла неожиданная задержка верхнего конца троса, на котором опускался груз, из-за защемления троса в обойме блока (рис. 3.8, *а*). Пренебрегая массой троса, определить его наибольшее натяжение при последующих колебаниях груза, если коэффициент жесткости троса $c = 4 \cdot 10^6$ *Н/м*.

Решение:

При защемлении троса в обойме блока на груз будут действовать сила тяжести $\overline{G} = m\overline{g}$ и натяжение троса $\overline{T}$ (рис. 3.8, *б*). Дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось *x* будет иметь вид:

$$m\ddot{x} = mg - T, \qquad (3.75)$$

откуда

$$T = mg - m\ddot{x}. \qquad (3.76)$$

В результате задержки верхнего конца троса груз стал совершать колебания, уравнение которых можно записать в виде:

$$x = A\sin(kt + \alpha), \qquad (3.77)$$

где A – амплитуда колебаний, м;

k – круговая частота колебаний, с$^{-1}$;

α – начальная фаза колебаний, рад.

Дважды продифференцируем это уравнение:

$$\dot{x} = Ak\cos(kt + \alpha), \qquad (3.78)$$

$$\ddot{x} = -Ak^2\sin(kt + \alpha), \qquad (3.79)$$

и подставим в формулу (3.76):

$$T = mg + mAk^2\sin(kt + \alpha). \qquad (3.80)$$

Максимальное значение силы $\overline{T}$ будет при $\sin(kt + \alpha) = 1$:

$$T_{\max} = m\left(g + Ak^2\right). \tag{3.81}$$

В этой формуле:

$$k^2 = \frac{c}{m} = \frac{4\cdot 10^6}{2000} = 2000\ c^{-2}, \tag{3.82}$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\upsilon_0^2}{k^2}} = \sqrt{0 + \frac{5^2}{2000}} = 0{,}112\ м, \tag{3.83}$$

где x_0 – положение груза в момент начала колебаний; совместим начало отсчета оси x с начальным положением груза, поэтому $x_0 = 0$;

$\upsilon_0 = 5\ м/с$ – скорость груза в момент начала колебаний.

Тогда окончательно максимальное натяжение троса составит:

$$T_{\max} = 2000\cdot\left(9{,}8 + 0{,}112\cdot 2000\right) = 467600\ Н = 467{,}6\ кН. \tag{3.84}$$

Задача 3.7. Определить в условиях предыдущей задачи, как изменится наибольшее натяжение троса, если между грузом и тросом ввести пружину с жесткостью $c_1 = 4\cdot 10^5\ Н/м$.

Решение:

В случае последовательного соединения пружины и троса приведенный коэффициент жесткости будет равен:

$$c_{экв} = \frac{c\cdot c_1}{c + c_1} = \frac{4\cdot 10^6\cdot 4\cdot 10^5}{4\cdot 10^6 + 4\cdot 10^5} = 3{,}64\cdot 10^5\ Н/м. \tag{3.85}$$

Тогда по формуле (3.82) найдем квадрат круговой частоты:

$$k_1^2 = \frac{c_{экв}}{m} = \frac{3{,}64\cdot 10^5}{2000} = 182\ c^{-2}, \tag{3.86}$$

а по формуле (3.83) – амплитуду колебаний:

$$A_1 = \sqrt{x_0^2 + \frac{\upsilon_0^2}{k_1^2}} = \sqrt{0 + \frac{5^2}{182}} = 0{,}371\ м. \tag{3.87}$$

Максимальное натяжение троса по формуле (3.22) будет равно:

$$T_{\max 1} = 2000\cdot\left(9{,}8 + 0{,}371\cdot 182\right) = 154644\ Н = 154{,}6\ кН. \tag{3.88}$$

Отношение натяжений в первом и во втором случаях:

$$\frac{T_{\max}}{T_{\max 1}} = \frac{467{,}6}{154{,}6} = 3{,}02. \tag{3.89}$$

Таким образом, путем введения амортизационной пружины можно значительно уменьшить натяжение троса, что является одной из мер предотвращения аварийной ситуации. Но также нужно учитывать, что в этом случае увеличится амплитуда колебаний груза:

$$\frac{A_1}{A} = \frac{0{,}371}{0{,}112} = 3{,}3. \tag{3.90}$$

4 ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ ТОЧКИ

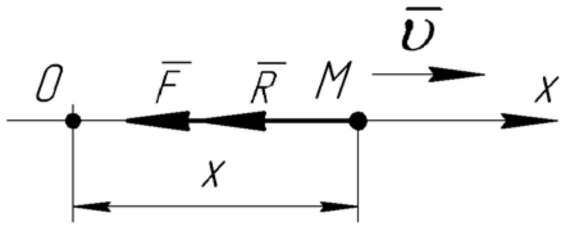


Рис. 4.1

В случае *затухающих колебаний* на точку M кроме восстанавливающей силы $\overline{F}$ действует сила сопротивления $\overline{R}$ (рис. 4.1), пропорциональная скорости точки:

где μ – коэффициент пропорциональности.

Дифференциальное уравнение движения в проекции на ось x будет иметь вид:

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x}\,. \tag{4.2}$$

Введем обозначения:

$$c/m = k^2, \quad \mu/m = 2n\,, \tag{4.3}$$

где n – коэффициент затухания колебаний, с$^{-1}$.

Тогда получим *дифференциальное уравнение затухающих колебаний точки*:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0\,. \tag{4.4}$$

Характеристическое уравнение будет иметь вид:

$$r^2 + 2nr + k^2 = 0\,. \tag{4.5}$$

Корни характеристического уравнения:

$$r_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}\,. \tag{4.6}$$

В зависимости от значений n и k можем получить три случая.

1. В случае, когда $n > k$ («большое» сопротивление среды), корни характеристического уравнения будут действительными, а решение уравнения (4.4) ищут в виде:

$$x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}\,. \tag{4.7}$$

В этом случае колебаний не возникнет.

2. Если $n = k$ («предельный» случай), то корни характеристического уравнения:

$$r_{1,2} = \pm n\,, \tag{4.8}$$

а решение уравнения (4.4) будет иметь вид:

$$x = e^{-nt}\left(C_1 + C_2 t\right). \tag{4.9}$$

Колебаний здесь также не возникнет.

3. В случае, когда $n < k$ («малое» сопротивление среды), корни характеристического уравнения будут мнимыми:

$$r_{1,2} = -n \pm ik^*\,, \tag{4.10}$$

где $k^* = \sqrt{k^2 - n^2}$ – частота затухающих колебаний.

Тогда решение уравнения (4.4) ищут в виде:

$$x = e^{-nt}\left(C_1 \cos k^* t + C_2 \sin k^* t\right). \qquad (4.11)$$

Если в момент времени $t = 0$ $x = x_0$, $\upsilon = \upsilon_0$, то:

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{nx_0 + \upsilon_0}{k^*}, \qquad (4.12)$$

а *уравнение затухающих колебаний* (4.11) окончательно будет выглядеть:

$$x = e^{-nt}\left(x_0 \cos k^* t + \frac{nx_0 + \upsilon_0}{k^*} \sin k^* t\right). \qquad (4.13)$$

Если в уравнении (4.11) ввести новые переменные:

$$C_1 = A \sin\alpha, \quad C_2 = A\cos\alpha, \qquad (4.14)$$

то получим:

$$x = Ae^{-nt} \sin\left(k^* t + \alpha\right). \qquad (4.15)$$

Решая совместно (4.12) и (4.14), найдем:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\left(nx_0 + \upsilon_0\right)^2}{k^2 - n^2}}, \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{x_0 k^*}{nx_0 + \upsilon_0}. \qquad (4.16)$$

Период затухающих колебаний:

$$T^* = \frac{2\pi}{k^*} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}. \qquad (4.17)$$

Декрементом затухания колебаний называется отношение амплитуды какого-то m-ого полного колебания к амплитуде предыдущего колебания:

$$D = \frac{A_m}{A_{m-1}} = e^{-nT*}. \qquad (4.18)$$

Логарифмический декремент:

$$\Delta = \left|\ln D\right| = nT^*. \qquad (4.19)$$

Задача 4.1. Груз массой 10 *кг*, подвешенный к концу пружины, движется в жидкости (рис. 4.2). Коэффициент жесткости пружины $c = 1000$ $Н/м$. Сила сопротивления жидкости перемещению груза пропорциональна скорости $\bar{R} = -\mu\bar{\upsilon}$, где μ – коэффициент сопротивления. В начальный момент груз был смещен вниз на 0,04 *м* из положения статического равновесия и ему была сообщена вниз скорость 0,04 *м/с*. Пренебрегая массой пружины, найти закон дальнейшего движения груза для трех значений коэффициента сопротивления:

1) $\mu = 520\ \frac{Н \cdot с}{м}$; 2) $\mu = 200\ \frac{Н \cdot с}{м}$; 3) $\mu = 160\ \frac{Н \cdot с}{м}$.

Решение:

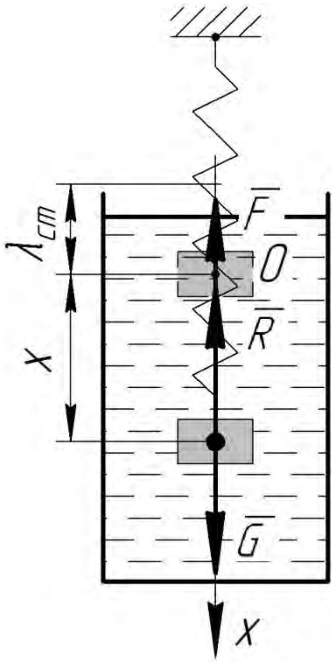


Рис. 4.2

Составим дифференциальное уравнение движения груза в жидкости. На него действуют сила тяжести $\overline{G}$, сила упругости пружины $\overline{F}$ и сила сопротивления $\overline{R}$ (рис. 4.2). Из положения статического равновесия груза проведем вертикально вниз ось *x*. Тогда дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось *x* будет иметь вид:

$$m\ddot{x} = G - F - R. \qquad (4.20)$$

Учитывая, что:

$$G = mg, \qquad F = c\left(x + \lambda_{cm}\right), \qquad R = \mu\upsilon = \mu\dot{x}, \qquad (4.21)$$

получим:

$$m\ddot{x} = mg - cx - c\lambda_{cm} - \mu\dot{x}, \qquad (4.22)$$

где λ_{cm} – статическое отклонение, м.

Так как в положении статического равновесия $mg = c\lambda_{cm}$, то уравнение примет вид:

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x}. \qquad (4.23)$$

Перенесем все в правую часть уравнения и разделим на *m*:

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = 0. \qquad (4.24)$$

Введем обозначения:

$$c/m = k^2, \quad \mu/m = 2n, \qquad (4.25)$$

где *k* – круговая частота колебаний, с$^{-1}$;

n – коэффициент затухания колебаний, с$^{-1}$.

Тогда получим дифференциальное уравнение затухающих колебаний точки:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0. \qquad (4.26)$$

Выполнив в уравнение (4.26) подстановку $x = e^{rt}$, $\dot{x} = re^{rt}$, $\ddot{x} = r^2e^{rt}$, получим характеристическое уравнение:

$$r^2 + 2nr + k^2 = 0. \qquad (4.27)$$

Корни характеристического уравнения:

$$r_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}. \qquad (4.28)$$

Вычислим значение круговой частоты:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{1000}{10}} = 10\ c^{-1} \qquad (4.29)$$

и найдем закон движения груза при различных значениях коэффициента μ.

1) $\mu = 520\ \dfrac{Н \cdot с}{м}$.

Коэффициент затухания колебаний:

$$n = \frac{\mu}{2m} = \frac{520}{2 \cdot 10} = 26\ c^{-1}. \qquad (4.30)$$

Имеем случай, когда $n > k$ («большое» сопротивление среды).

Корни характеристического уравнения найдем по формуле (4.28):

$$r_1 = -n + \sqrt{n^2 - k^2} = -26 + \sqrt{26^2 - 10^2} = -2, \qquad (4.31)$$

$$r_2 = -n - \sqrt{n^2 - k^2} = -26 - \sqrt{26^2 - 10^2} = -50. \qquad (4.32)$$

Корни действительные, а решение уравнения (4.26) ищут в виде:

$$x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, \qquad (4.33)$$

или с учетом найденных корней:

$$x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-50t}. \qquad (4.34)$$

Продифференцируем уравнение (4.33):

$$\upsilon = \dot{x} = -2C_1 e^{-2t} - 50 C_2 e^{-50t}. \qquad (4.35)$$

Подставим в уравнения (4.34) и (4.35) начальные условия ($t = 0$, $x_0 = 0,04\ м$, $\upsilon_0 = 0,04\ м/с$):

$$0,04 = C_1 + C_2, \qquad (4.36)$$

$$0,04 = -2C_1 - 50C_2. \qquad (4.37)$$

Выразим из уравнения (4.36):

$$C_2 = 0,04 - C_1, \qquad (4.38)$$

и подставим в уравнение (4.37):

$$0,04 = -2C_1 - 50 \cdot (0,04 - C_1). \qquad (4.39)$$

Найдем постоянные интегрирования:

$$0,04 = -2C_1 - 50 \cdot 0,04 + 50 \cdot C_1, \qquad (4.40)$$

$$2,04 = -1,96 C_1, \qquad (4.41)$$

$$C_1 = -\frac{2,04}{1,96} = -1,04, \qquad (4.42)$$

$$C_2 = 0,04 + 1,04 = 1,08. \qquad (4.43)$$

Тогда окончательно уравнение (4.8) движения груза будет иметь вид:

$$x = -1,04 e^{-2t} + 1,08 e^{-50t},\ \text{м}. \qquad (4.44)$$

Груз совершает апериодическое движение и колебаний не возникнет.

2) $\mu = 200\ \dfrac{Н \cdot с}{м}$.

Коэффициент затухания колебаний:

$$n = \frac{\mu}{2m} = \frac{200}{2 \cdot 10} = 10\ c^{-1}. \qquad (4.45)$$

Имеет место «предельный» случай, т. е. $n = k$. Корни характеристического уравнения:

$$r_1 = r_2 = -n = -10, \qquad (4.46)$$

а решение уравнения (4.26) будет иметь вид:

$$x = e^{-nt}\left(C_1 + C_2 t\right), \qquad (4.47)$$

или

$$x = e^{-10t}\left(C_1 + C_2 t\right). \qquad (4.48)$$

Продифференцируем уравнение (4.48):

$$\upsilon = \dot{x} = -10e^{-10t}\left(C_1 + C_2 t\right) + C_2 e^{-10t}. \qquad (4.49)$$

Подставив в уравнения (4.48) и (4.49) начальные условия ($t = 0$, $x_0 = 0,04\ м$, $\upsilon_0 = 0,04\ м/с$), найдем постоянные интегрирования:

$$C_1 = 0,04, \quad C_2 = 0,44. \qquad (4.50)$$

Тогда окончательно уравнение (4.12) движения груза будет иметь вид:

$$x = 0,04e^{-10t}\left(1 + 11t\right), \text{ м.} \qquad (4.51)$$

В этом случае колебаний также не возникнет.

3) $\mu = 160\ \dfrac{Н \cdot с}{м}$.

Коэффициент затухания колебаний:

$$n = \frac{\mu}{2m} = \frac{600}{2 \cdot 10} = 8\ c^{-1}. \qquad (4.52)$$

Получили случай, когда $n < k$ («малое» сопротивление среды). Тогда корни характеристического уравнения из формулы (4.28):

$$r_{1,2} = -n \pm ik^*, \qquad (4.53)$$

где $k^* = \sqrt{k^2 - n^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6\ c^{-1}$.

Тогда решение уравнения (4.26) ищем в виде:

$$x = e^{-nt}\left(C_1 \cos k^* t + C_2 \sin k^* t\right). \qquad (4.54)$$

Дифференцируем уравнение (4.54):

$$\upsilon = \dot{x} = -ne^{-nt}\left(C_1 \cos k^* t + C_2 \sin k^* t\right) +$$
$$+ e^{-nt}\left(-k^* C_1 \sin k^* t + k^* C_2 \cos k^* t\right). \qquad (4.55)$$

Подставляем в уравнения (4.54) и (4.55) начальные условия ($t = 0$, $x_0 = 0,04\ м$, $\upsilon_0 = 0,04\ м/с$) и находим постоянные интегрирования:

$$C_1 = x_0 = 0,04, \qquad (4.56)$$

$$C_2 = \frac{nx_0 + \upsilon_0}{k^*} = \frac{8 \cdot 0,04 + 0,04}{6} = 0,06. \qquad (4.57)$$

Тогда уравнение (4.54) будет выглядеть:

$$x = e^{-8t}\left(0,04\cos 6t + 0,06\sin 6t\right), \text{ м.} \qquad (4.58)$$

Груз будет совершать колебания, которые будут с течением времени

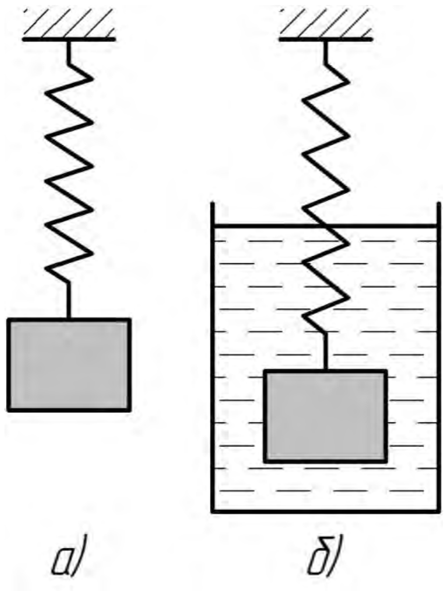


Рис. 4.3

постепенно затухать. Величина k^* будет являться частотой этих затухающих колебаний.

Задача 4.2. Для определения вязкости жидкости Кулон применил следующий метод: подвесив на пружине тонкую пластинку (рис. 4.3, *а*), он определял период T_1 ее свободных колебаний в воздухе, а затем пластинку помещал в жидкость (рис. 4.3, *б*) и находил период T_2 затухающих колебаний. Сила сопротивления жидкости движению пластинки равна $R = 2S\eta\upsilon$, где *2S* – площадь поверхности пластинки, η – вязкость жидкости, υ – скорость пластинки. Пренебрегая трением между пластинкой и воздухом, определить коэффициент вязкости жидкости η по найденным из опыта периодам T_1 и T_2, если масса пластинки равна m.

Решение:

Период свободных колебаний:

$$T_1 = \frac{2\pi}{k}, \tag{4.59}$$

где k – круговая частота.

Период затухающих колебаний:

$$T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}, \tag{4.60}$$

где n – коэффициент затухания колебаний.

Коэффициент затухания найдем по формуле:

$$n = \frac{\mu}{2m}, \tag{4.61}$$

где μ – коэффициент сопротивления.

Для рассматриваемого случая:

$$\mu = 2S\eta, \tag{4.62}$$

$$n = \frac{2S\eta}{2m} = \frac{S\eta}{m}. \tag{4.63}$$

Выразим из формул (4.59) и (4.60):

$$k = \frac{2\pi}{T_1}, \quad \sqrt{k^2 - n^2} = \frac{2\pi}{T_2}. \qquad (4.63)$$

Полученные выражения возведем в квадрат:

$$k^2 = \frac{4\pi^2}{T_1^2}, \tag{4.64}$$

$$k^2 - n^2 = \frac{4\pi^2}{T_2^2}. \tag{4.65}$$

Подставим значения (4.63) и (4.64) в уравнение (4.65):

$$\frac{4\pi^2}{T_1^2} - \frac{S^2\eta^2}{m^2} = \frac{4\pi^2}{T_2^2}. \tag{4.66}$$

Отсюда найдем коэффициент вязкости жидкости:

$$\frac{S^2\eta^2}{m^2} = \frac{4\pi^2}{T_1^2} - \frac{4\pi^2}{T_2^2}, \tag{4.67}$$

$$\frac{S^2\eta^2}{m^2} = \frac{4\pi^2}{T_1^2 T_2^2}\left(T_2^2 - T_1^2\right), \tag{4.68}$$

$$\eta = \frac{2\pi m}{S T_1 T_2} \cdot \sqrt{T_2^2 - T_1^2}. \tag{4.69}$$

Задача 4.3. Тело массой 5 *кг* подвешено на пружине, коэффициент жесткости которой равен $c = 2000\ Н/м$. Сопротивление среды пропорционально скорости. Амплитуда после четырех полных колебаний уменьшилась в 12 раз. Определить период и логарифмический декремент колебаний.

Решение:

Так как после четырех колебаний амплитуда уменьшилась в 12 раз, то:

$$\frac{A_{12}}{A_1} = \frac{1}{12} = e^{-4nT*}, \tag{4.70}$$

где 4 – количество полных колебаний;

T^* – период затухающих колебаний.

Прологарифмируем уравнение (4.70):

$$\ln\left(\frac{1}{12}\right) = -4nT^*, \tag{4.71}$$

$$-2,485 = -4nT^*. \tag{4.72}$$

Отсюда логарифмический декремент:

$$\Delta = nT^* = \frac{2,485}{4} = 0,6212. \tag{4.73}$$

Период затухающих колебаний:

$$T^* = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}, \tag{4.74}$$

где k – круговая частота.

Из формулы (4.73):

$$n = \frac{0,6212}{T^*}, \quad n^2 = \frac{0,6212^2}{\left(T^*\right)^2}, \tag{4.75}$$

а квадрат круговой частоты, как известно:

$$k^2 = \frac{c}{m} = \frac{2000}{5} = 400. \tag{4.76}$$

Подставим данные значения в уравнение (4.74), предварительно возведя его в квадрат:

$$\left(T^*\right)^2 = \frac{4\pi^2}{k^2 - n^2}, \tag{4.77}$$

$$\left(T^*\right)^2 \cdot \left[400 - \frac{0,6212^2}{\left(T^*\right)^2}\right] = 4\pi^2, \tag{4.78}$$

$$400\left(T^*\right)^2 - 0,6212^2 = 4\pi^2. \tag{4.79}$$

Отсюда найдем период затухающих колебаний:

$$T^* = \sqrt{\frac{4\pi^2 + 0,6212^2}{400}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 3,14^2 + 0,6212^2}{400}} = 0,316\ c. \tag{4.80}$$

Задача 4.4. Материальная точка массой m совершает затухающие колебания под действием силы упругости пружины с коэффициентом жесткости $\boldsymbol{c}$ и силы сопротивления среды $\overline{R} = -\mu\overline{\upsilon}$, где $\mu > 0$ – коэффициент сопротивления. При демпфировании[1] колебаний коэффициент сопротивления μ изменился до μ_1, при этом колебания уменьшились вдвое. Найти коэффициент сопротивления μ_1.

Решение:

Частота затухающих колебаний при коэффициенте сопротивления μ:

$$k^* = \sqrt{k^2 - n^2}, \tag{4.81}$$

где

$$k^2 = \frac{c}{m}, \quad n = \frac{\mu}{2m}. \tag{4.82}$$

Тогда

$$k^* = \sqrt{\frac{c}{m} - \frac{\mu^2}{4m^2}}. \tag{4.83}$$

Частота затухающих колебаний при коэффициенте μ_1:

[1] *Демпфированием* называют искусственное подавление колебаний, возникающих в машинах, приборах, системах или сооружениях при их работе. Для этого используют различные демпферы, амортизаторы, глушители.

$$k_1^* = \frac{k^*}{2} = \sqrt{\frac{c}{m} - \frac{\mu_1^2}{4m^2}}\,, \tag{4.84}$$

откуда

$$k^* = 2\sqrt{\frac{c}{m} - \frac{\mu_1^2}{4m^2}} = \sqrt{\frac{4c}{m} - \frac{\mu_1^2}{m^2}}\,. \tag{4.85}$$

Приравняем правые части уравнений (4.83) и (4.85):

$$\sqrt{\frac{c}{m} - \frac{\mu^2}{4m^2}} = \sqrt{\frac{4c}{m} - \frac{\mu_1^2}{m^2}}\,, \tag{4.86}$$

и возведем в квадрат:

$$\frac{c}{m} - \frac{\mu^2}{4m^2} = \frac{4c}{m} - \frac{\mu_1^2}{m^2}\,, \tag{4.87}$$

Домножим уравнение на m^2:

$$mc - \frac{\mu^2}{4} = 4mc - \mu_1^2\,, \tag{4.88}$$

откуда найдем коэффициент сопротивления при демпфировании колебаний:

$$\mu_1 = \sqrt{3mc + \frac{\mu^2}{4}}\,. \tag{4.89}$$

Задача 4.5. Статическое удлинение пружины под действием груза массой m равно $\lambda_{ст}$. На совершающий колебания груз действует сила сопротивления $R = \mu\upsilon$, где μ – коэффициент сопротивления. Определить наименьшую силу сопротивления, при которой процесс движения груза станет апериодическим, если скорость груза $\upsilon = 1$ $м/с$.

Решение:

Коэффициент затухания колебаний:

$$n = \frac{\mu}{2m}. \tag{4.90}$$

Круговая частота колебаний по формуле (3.15):

$$k = \sqrt{\frac{g}{\lambda_{ст}}}\,. \tag{4.91}$$

Процесс движения груза будет апериодическим, когда $n = k$ («предельный» случай):

$$\frac{\mu}{2m} = \sqrt{\frac{g}{\lambda_{ст}}}\,. \tag{4.92}$$

Тогда коэффициент сопротивления:

$$\mu = 2m\sqrt{\frac{g}{\lambda_{ст}}}, \qquad (4.93)$$

а сила сопротивления:

$$R = \mu\upsilon = 2m\upsilon\sqrt{\frac{g}{\lambda_{ст}}}. \qquad (4.94)$$

При скорости $\upsilon = 1 \ м/с$ сила сопротивления будет равна:

$$R = \mu \cdot 1 = 2m\sqrt{\frac{g}{\lambda_{ст}}}. \qquad (4.95)$$

5 ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОЧКИ

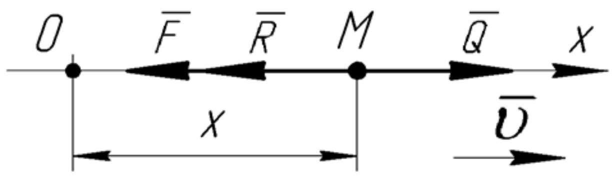


Рис. 5.1

При *вынужденных колебаниях* точки M на нее кроме восстанавливающей силы $\overline{F}$ и силы сопротивления $\overline{R}$, действует внешняя возмущающая сила $\overline{Q}$ (рис. 5.1), модуль которой равен:

где H – амплитуда возмущающей силы, м;

p – круговая частота возмущающей силы, с$^{-1}$.

Дифференциальное уравнение движения в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x} + H\sin pt. \tag{5.2}$$

Обозначим:

$$c/m = k^2, \quad \mu/m = 2n, \quad H/m = h. \tag{5.3}$$

Тогда *дифференциальное уравнение вынужденных колебаний точки* будет иметь вид:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = h\sin pt. \tag{5.4}$$

Общее решение такого неоднородного уравнения будет равно:

$$x = x_1 + x_2, \tag{5.5}$$

где $x_1 = Ae^{-nt}\sin\left(\sqrt{k^2 - n^2}t + \alpha\right)$ – общее решение однородного уравнения (уравнение собственных колебаний точки);

$x_2 = B\sin\left(pt - \beta\right)$ – частное решение неоднородного уравнения (уравнение вынужденных колебаний); здесь B – амплитуда вынужденных колебаний, β – сдвиг фазы вынужденных колебаний по отношению к фазе возмущающей силы, определяются по формулам:

$$B = \frac{h}{\sqrt{\left(k^2 - p^2\right)^2 + 4n^2p^2}}, \tag{5.6}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{2np}{k^2 - p^2}. \tag{5.7}$$

Задача 5.1. На пружине, коэффициент жесткости которой $c = 19{,}6$ *Н/м*, подвешен магнитный стержень массы 100 *г* (рис. 5.2, *а*). Нижний конец магнита проходит через катушку, по которой идет переменный ток $i = 20\sin 8\pi t$, *А*. Ток идет с момента времени $t = 0$, втягивая стержень в соленоид; стержень был подвешен к концу нерастянутой пружины и висел на пружине неподвижно. Сила взаимодействия между маг-

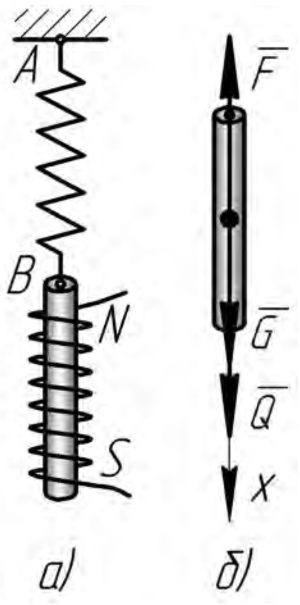


Рис. 5.2

нитом и катушкой определяется равенством $Q = 0{,}016\pi i$, Н. Определить уравнение движения магнитного стержня.

Решение:

На стержень действуют: сила тяжести $\bar{G}$, сила упругости пружины $\bar{F}$ и возмущающая сила $\bar{Q}$ (рис. 5.2, *б*). Проекции этих сил на ось *x* будут равны:

$$G_x = mg, \qquad F_x = -c\left(x + \lambda_{cm}\right), \qquad Q_x = 0{,}016\pi i. \tag{5.8}$$

где λ_{cm} – статическое отклонение.

Учитывая, что по условиям задачи:

$$i = 20\sin 8\pi t, \tag{5.9}$$

значение силы взаимодействия будет равно:

$$Q_x = 0{,}016\pi \cdot 20\sin 8\pi t = \\ = 0{,}032\pi \sin 8\pi t = 1{,}005\sin 8\pi t, \tag{5.10}$$

где $8\pi = p$ – круговая частота силы взаимодействия между магнитом и катушкой.

Дифференциальное уравнение движения в проекции на ось *x*:

$$m\ddot{x} = mg - c\left(x + \lambda_{cm}\right) + 1{,}005\sin 8\pi t, \tag{5.11}$$

или

$$m\ddot{x} = mg - c\lambda_{cm} - cx + 1{,}005\sin 8\pi t. \tag{5.12}$$

Т.к. в положении статического равновесия:

$$mg = c\lambda_{cm}, \tag{5.13}$$

то:

$$m\ddot{x} = -cx + 1{,}005\sin 8\pi t. \tag{5.14}$$

Преобразуем уравнение:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = \frac{1{,}005}{m}\sin 8\pi t. \tag{5.15}$$

Обозначим:

$$\frac{c}{m} = k^2, \quad \frac{1{,}005}{m} = h. \tag{5.16}$$

Тогда дифференциальное уравнение колебаний стержня будет иметь вид:

$$\ddot{x} + k^2 x = h\sin pt. \tag{5.17}$$

Общее решение неоднородного уравнения (5.17) равно:

$$x = x_1 + x_2, \tag{5.18}$$

где x_1 – общее решение однородного уравнения (уравнение свободных колебаний точки);

x_2 – частное решение неоднородного уравнения (уравнение вынужденных колебаний).

Решения x_1 и x_2 будем искать в виде:

$$x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad x_2 = B\sin\left(pt - \beta\right). \tag{5.19}$$

По формулам (5.16) найдем:

$$k^2 = \frac{c}{m} = \frac{19,6}{0,1} = 196\ c^{-2}, \quad k = 14\ c^{-1}, \quad h = \frac{1,005}{0,1} = 10,05\ c^{1}, \tag{5.20}$$

а из формулы (5.6) и (5.7), учитывая, что $n = 0$:

$$B = \frac{h}{k^2 - p^2} = \frac{10,05}{196 - \left(8\pi\right)^2} = -0,023\ м, \quad \beta = 0, \tag{5.21}$$

Найденные значения подставим в уравнения (5.19):

$$x_1 = C_1 \cos 14t + C_2 \sin 14t, \quad x_2 = -0,023 \sin 8\pi t. \tag{5.22}$$

Тогда уравнение (5.18) будет иметь вид:

$$x = C_1 \cos 14t + C_2 \sin 14t - 0,023 \sin 8\pi t. \tag{5.23}$$

Продифференцируем уравнение (5.23):

$$\upsilon = \dot{x} = -14C_1 \sin 14t + 14C_2 \cos 14t - 0,023 \cdot 8\pi \cos 8\pi t. \tag{5.24}$$

Подставим в уравнения (5.23) и (5.24) начальные условия ($t = 0$, $x_0 = -\lambda_{ст}$, $\upsilon_0 = 0$) и найдем постоянные интегрирования C_1 и C_2,

$$C_1 = -\lambda_{ст}, \quad C_2 = \frac{0,023 \cdot 8\pi}{14} = 0,041\ м. \tag{5.25}$$

Статическое отклонение:

$$\lambda_{ст} = \frac{mg}{c} = \frac{0,1 \cdot 9,8}{19,6} = 0,05\ м. \tag{5.26}$$

Окончательно уравнение движения стержня:

$$x = -0,05 \cos 14t + 0,041 \cdot \sin 14t - 0,023 \sin 8\pi t,\ \text{м}. \tag{5.27}$$

Задача 5.2. В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения магнитного стержня, если ему в положении статического равновесия сообщили начальную скорость $\upsilon_0 = 0,05\ м/с$.

Решение:

Т.к. в начальный момент времени стержень находился в положении статического равновесия, то начальные условия его движения будут:

$$t = 0, \quad x_0 = 0, \quad \upsilon_0 = 0,05\ м/с. \tag{5.28}$$

Подставив начальные условия в уравнения (5.23) и (5.24), найдем постоянные интегрирования:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{0,05 + 0,023 \cdot 8\pi}{14} = 0,045\ м. \tag{5.29}$$

Тогда уравнение движение стержня будет иметь вид:

$$x = 0{,}045 \cdot \sin 14t - 0{,}023 \sin 8\pi t \text{, м.} \qquad (5.30)$$

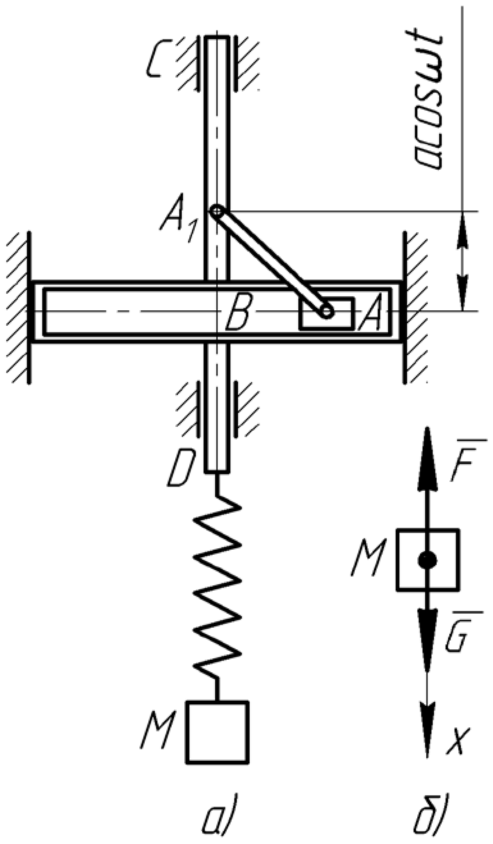


Рис. 5.3

Задача 5.3. Груз M массой $m = 0{,}4$ *кг* подвешен на пружине с коэффициентом жесткости $c = 39{,}2\ Н/м$ (рис. 5.3, *а*). Верхний конец пружины совершает гармонические колебания по вертикальной прямой вместе со стержнем CD, так что расстояние $A_1B = a\cos\omega t$, где a – амплитуда, ω – угловая скорость вращения кривошипа AA_1. Найти уравнение вынужденных колебаний, если $a = 0{,}02$ *м*, $\omega = 7$ *рад/с*.

Решение:

Груз M участвует в двух движениях: в переносном – вместе со стержнем CD по закону $x_e = A_1B = a\cos\omega t$ и в относительном – по отношению к стержню по некоторому закону $x_r = f(t)$.

Тогда закон движения груза:

$$x = x_r + x_e = x_r + a\cos\omega t, \qquad (5.31)$$

откуда:

$$x_r = x - a\cos\omega t. \qquad (5.32)$$

Тогда деформация пружины:

$$\Delta = \lambda_{ст} + x_r = \lambda_{ст} + x - a\cos\omega t, \qquad (5.33)$$

где $\lambda_{ст}$ – статическое отклонение.

На груз действуют сила тяжести $\bar{G}$ и сила упругости пружины $\bar{F}$ (рис. 5.3, *б*). Проекции этих сил равны:

$$G_x = mg, \quad F_x = c \cdot \Delta = c \cdot \left(\lambda_{ст} + x - a\cos\omega t\right). \qquad (5.34)$$

Тогда дифференциальное уравнение движения груза:

$$m\ddot{x} = mg - c\lambda_{ст} - cx + ca\cos\omega t. \qquad (5.35)$$

Учитывая, что в положении статического равновесия:

$$mg = c\lambda_{ст}, \qquad (5.36)$$

получим:

$$m\ddot{x} = -cx + ca\cos\omega t. \qquad (5.37)$$

Преобразуем уравнение, предварительно разделив обе его части на m:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = \frac{ca}{m}\cos\omega t. \qquad (5.38)$$

Обозначим:

$$\frac{c}{m}=k^2,\quad \frac{ca}{m}=h. \tag{5.39}$$

Тогда дифференциальное уравнение движения груза:

$$\ddot{x}+k^2x=h\cos\omega t. \tag{5.40}$$

Частное решение этого неоднородного уравнения будет представлять собой уравнение вынужденных колебаний. Его будем искать в виде:

$$x_{вын}=B\cos\omega t, \tag{5.41}$$

где B – амплитуда вынужденных колебаний.

Дважды продифференцируем выражение (5.41):

$$\dot{x}_{вын}=-B\omega\sin\omega t, \tag{5.42}$$

$$\ddot{x}_{вын}=-B\omega^2\cos\omega t. \tag{5.43}$$

Подставим выражения (5.41) и (5.43) вместо x в уравнение (5.40):

$$-B\omega^2\cos\omega t+k^2B\cos\omega t=h\cos\omega t. \tag{5.44}$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos\omega t$, получим:

$$-B\omega^2+k^2B=h, \tag{5.45}$$

откуда

$$B=\frac{h}{k^2-\omega^2}. \tag{5.46}$$

Такое же значение мы получили бы, подставив в формулу (5.6) значения $n=0$, $p=\omega$.

Вычислим по формулам (5.39):

$$k^2=\frac{39,2}{0,4}=98\ c^{-2},\quad h=\frac{39,2\cdot 0,02}{0,4}=1,96\ м/c^2. \tag{5.47}$$

Тогда амплитуда вынужденных колебаний:

$$B=\frac{1,96}{98-7^2}=0,04\ м, \tag{5.48}$$

а уравнение вынужденных колебаний:

$$x_{вын}=0,04\cos 7t,\ \text{м}. \tag{5.49}$$

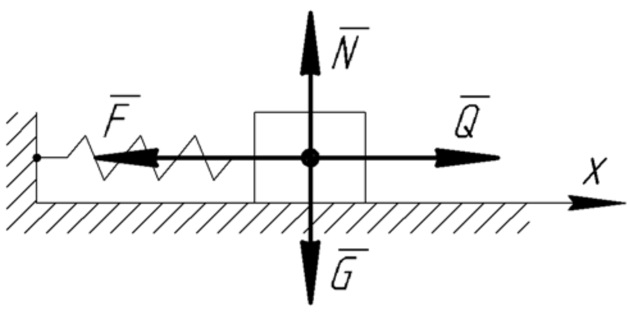


Рис. 5.4

Задача 5.4. Тело массой $m=1\ кг$ прикреплено к пружине (рис. 5.4), коэффициент жесткости которой $c=100\ Н/м$. Тело движется прямолинейно по горизонтальной гладкой поверхности при действии возмущающей силы $Q=4\sin 10t$. Найти закон изменения амплитуды вынужденных колебаний.

Решение:

На тело будут действовать сила тяжести $\bar{G}$, нормальная реакция $\bar{N}$, сила упругости $\bar{F}$ и возмущающая сила $\bar{Q}$ (рис. 5.4). Дифференциальное уравнение движения тела в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = Q - F, \tag{5.50}$$

или

$$m\ddot{x} = 4\sin 10t - cx, \tag{5.51}$$

где $p = 10\ c^{-1}$ – круговая частота возмущающей силы.

Преобразуем уравнение (5.51) и разделим на m:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = \frac{4}{m}\sin 10t. \tag{5.52}$$

Обозначив в этом уравнении:

$$\frac{c}{m} = k^2, \quad \frac{4}{m} = h. \tag{5.53}$$

получим дифференциальное уравнение вынужденных колебаний:

$$\ddot{x} + k^2 x = h\sin pt. \tag{5.54}$$

По формулам (5.53) вычислим:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{100}{1}} = 10\ c^{-1}, \quad h = \frac{4}{1} = 4\ м/c^2. \tag{5.55}$$

Поскольку круговая частота собственных колебаний равна круговой частоте возмущающей силы ($p = k$), значит иметь место резонансные колебания тела. Поэтому уравнение вынужденных колебаний будем искать в виде:

$$x_{вын} = Dt\cos pt, \tag{5.56}$$

где D – некоторая постоянная величина.

Продифференцируем дважды уравнение (5.56):

$$\dot{x}_{вын} = D\cos pt - Dtp\sin pt, \tag{5.57}$$

$$\begin{aligned}\ddot{x}_{вын} &= -Dp\sin pt - \left(Dp\sin pt + Dtp^2\cos pt\right) = \\ &= -2Dp\sin pt - Dtp^2\cos pt.\end{aligned} \tag{5.58}$$

Подставляя выражения (5.56) и (5.58) в уравнение (5.54), получим:

$$-2Dp\sin pt - Dtp^2\cos pt + k^2 Dt\cos pt = h\sin pt. \tag{5.59}$$

Приравнивая коэффициенты при $\sin pt$, получим:

$$-2Dp = h, \tag{5.60}$$

откуда:

$$D = -\frac{h}{2p} = -\frac{4}{2\cdot 10} = -0{,}2. \tag{5.61}$$

Тогда уравнение вынужденных колебаний (5.56) примет вид:

$$x_{вын} = -0{,}2t\cos 10t, \tag{5.62}$$

где $B=-0,2t$ – амплитуда вынужденных колебаний, м.

Уравнение амплитуды показывает, что она будет увеличиваться пропорционально времени.

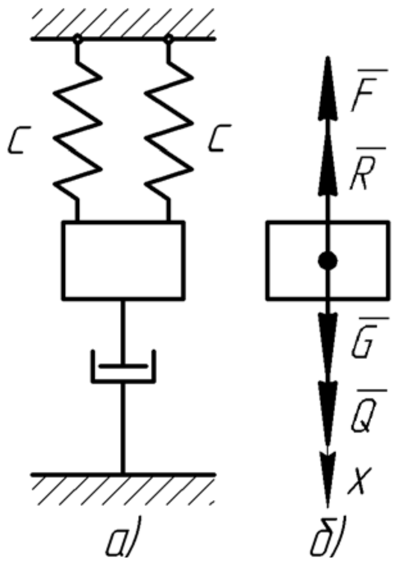


Рис. 5.5

Задача 5.5. Груз массы $m=2\ кг$ закреплен на упругой демпфирующей подвеске, включающей в себя две параллельные пружины жесткости $c=144\ Н/м$ каждая и гидравлический демпфер с коэффициентом сопротивления $\mu=20\ Н\cdot с/м$ (рис. 5.5, *а*). Груз подвержен действию гармонической возмущающей силы $\bar{Q}$. Определить круговую частоту p установившихся вертикальных колебаний, если фаза этих колебаний отстает от фазы возмущающей силы на величину $\beta=\pi/4$.

Решение:

На груз действуют сила тяжести $\bar{G}$, сила упругости $\bar{F}$, сила сопротивления $\bar{R}$ и возмущающая сила $\bar{Q}$ (рис. 5.5, *б*). Дифференциальное уравнение движения тела в проекции на ось *x*:

$$m\ddot{x}=G+Q-F-R, \tag{5.63}$$

или

$$m\ddot{x}=mg+H\sin pt-c_{экв}\left(x+\lambda_{ст}\right)-\mu\dot{x}, \tag{5.64}$$

где $\lambda_{ст}$ – статическое отклонение;

$c_{экв}$ – приведенный коэффициент жесткости; при параллельном соединении пружин находится по формуле (3.21):

$$c_{экв}=\frac{4c\cdot c}{c+c}=2c=2\cdot 144=288\ Н/м. \tag{5.65}$$

Учитывая, что в положении статического равновесия груза:

$$mg=c_{экв}\lambda_{ст}, \tag{5.66}$$

получим:

$$m\ddot{x}=H\sin pt-c_{экв}x-\mu\dot{x}. \tag{5.67}$$

Разделим на *m* обе части уравнения и преобразуем:

$$\ddot{x}+\frac{\mu}{m}\dot{x}+\frac{c_{экв}}{m}x=\frac{H}{m}\sin pt. \tag{5.68}$$

Обозначив в этом уравнении:

$$\frac{\mu}{m}=2n,\quad \frac{c_{экв}}{m}=k^2, \tag{5.69}$$

откуда найдем:

$$n = \frac{\mu}{2m} = \frac{20}{2 \cdot 2} = 5\ c^{-1}, \qquad (5.70)$$

$$k^2 = \frac{288}{2} = 144\ c^{-2}. \qquad (5.71)$$

Сдвиг фазы вынужденных колебаний по отношению к фазе возмущающей силы определяют по формуле:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{2np}{k^2 - p^2}. \qquad (5.72)$$

Подставим сюда все известные значения и упростим:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{2 \cdot 5 \cdot p}{144 - p^2}, \qquad (5.73)$$

$$1 = \frac{10p}{144 - p^2}, \qquad (5.74)$$

$$p^2 + 10p - 144 = 0. \qquad (5.75)$$

Корни полученного квадратного уравнения:

$$p_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 + 4 \cdot 144}}{2} = -5 \pm 13 = 8; -18. \qquad (5.76)$$

Поскольку второй (отрицательный) корень не имеет физического смысла, то круговая частота вынужденных колебаний равна $p = 8\ c^{-1}$.

Задача 5.6. Электродвигатель массой *M* (вместе с ротором) установлен на упругом фундаменте, снабженном демпфером. Статическая деформация фундамента равна λ_{cm}. Ротор имеет массу *m*, а центр масс его смещен от оси вращения на величину *r*. Определить угловую скорость ω ротора, если амплитуда вынужденных колебаний замерена и равна *B*. Демпфер обусловливает появление силы сопротивления, пропорциональной скорости, и сконструирован так, что при выключенном двигателе имеет место предельное апериодическое движение фундамента.

Решение:

В положении статического равновесия электродвигателя, т.е. когда ротор не вращается (рис. 5.6, *а*):

$$G = F, \qquad (5.77)$$

или

$$Mg = c\lambda_{cm}. \qquad (5.78)$$

При вращении ротора на электродвигатель будет действовать центробежная сила (рис. 5.6, *б*):

$$F^{ц} = ma_n = m\omega^2 r, \qquad (5.79)$$

где $a_n = \omega^2 r$ – нормальное (центростремительное) ускорение центра масс ротора, смещенного от оси вращения двигателя на величину *r*.

Таким образом, электродвигатель мы можем рассматривать как материальную точку, на которую действуют сила тяжести $\overline{G}$, сила упругости фундамента $\overline{F}$, центробежная сила $\overline{F}^{ц}$ и сила сопротивления демпфера $\overline{R}$ (рис. 5.6, *в*).

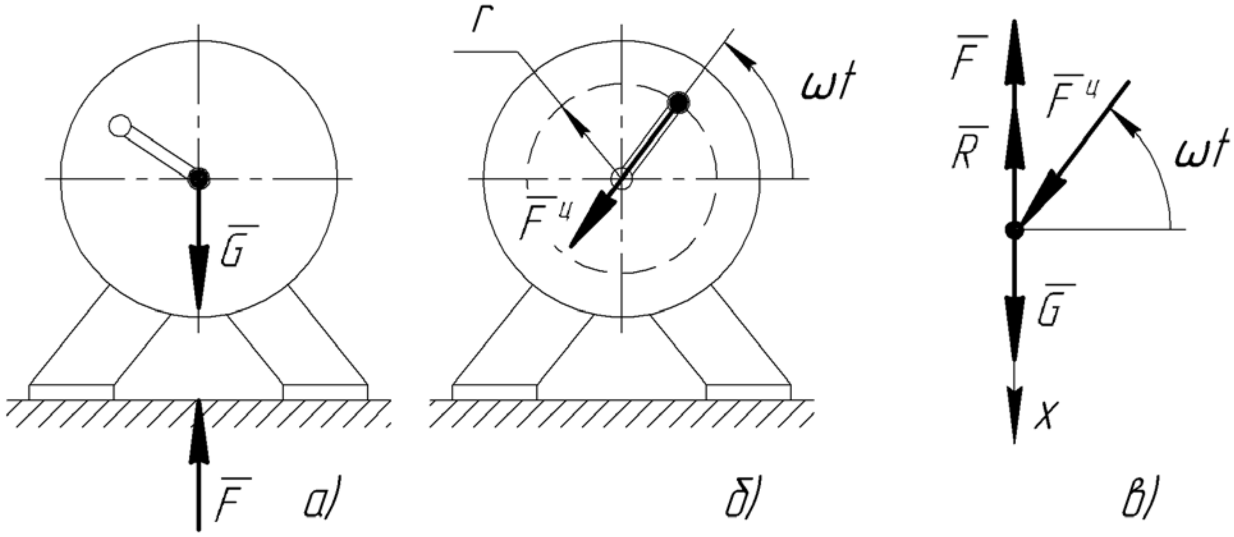


Рис. 5.6

Проекции этих сил на ось x будут равны:

$$G_x = Mg\,,\quad F_x = c\left(x+\lambda_{cm}\right),\quad F_x^{ц} = m\omega^2 r\sin\omega t\,,\quad R_x = -\mu\dot{x}\,. \tag{5.80}$$

Тогда дифференциальное уравнение движения электродвигателя в проекции на ось x:

$$M\ddot{x} = Mg - c\left(x+\lambda_{cm}\right) + m\omega^2 r\sin\omega t - \mu\dot{x}\,. \tag{5.81}$$

Учитывая равенство (5.19), получим:

$$M\ddot{x} = -cx + m\omega^2 r\sin\omega t - \mu\dot{x}\,. \tag{5.82}$$

Разделим на M и преобразуем:

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{M}\dot{x} + \frac{c}{M}x = \frac{m\omega^2 r}{M}\sin\omega t\,. \tag{5.83}$$

В этом уравнении:

$$\frac{\mu}{M} = 2n\,, \tag{5.84}$$

$$\frac{m\omega^2 r}{M} = h\,, \tag{5.85}$$

$$\frac{c}{M} = k^2\,, \tag{5.86}$$

или учитывая равенство (5.78):

$$k^2 = \frac{c}{M} = \frac{g}{\lambda_{cm}}\,. \tag{5.87}$$

Амплитуда вынужденных колебаний при наличии сил сопротивления определяется по формуле:

$$B=\frac{h}{\sqrt{\left(k^2-p^2\right)^2+4n^2p^2}}, \tag{5.88}$$

где $p=\omega$ – круговая частота вынужденных колебаний.

«Предельный случай» апериодического движения имеет место, когда $k=n$. Тогда формула (5.22) примет вид:

$$B=\frac{h}{\sqrt{\left(k^2-\omega^2\right)^2+4k^2\omega^2}}, \tag{5.89}$$

Упростим:

$$B=\frac{h}{\sqrt{k^4-2k^2\omega^2+\omega^2+4k^2\omega^2}}=\frac{h}{\sqrt{k^4+2k^2\omega^2+\omega^2}}, \tag{5.90}$$

$$B=\frac{h}{k^2+\omega^2}, \tag{5.91}$$

$$B\left(k^2+\omega^2\right)=h\,. \tag{5.92}$$

Подставим сюда значения из формул (5.85) и (5.87):

$$B\left(\frac{g}{\lambda_{ст}}+\omega^2\right)=\frac{m\omega^2r}{M}. \tag{5.93}$$

Преобразуем:

$$B\frac{g}{\lambda_{ст}}+B\omega^2=\frac{m\omega^2r}{M}, \tag{5.94}$$

$$B\frac{g}{\lambda_{ст}}=\omega^2\left(\frac{mr}{M}-B\right), \tag{5.95}$$

$$B\frac{g}{\lambda_{ст}}=\omega^2\cdot\frac{1}{M}\left(mr-MB\right). \tag{5.96}$$

Тогда искомая угловая скорость:

$$\omega=\sqrt{\frac{BMg}{\lambda_{ст}\left(mr-MB\right)}}\,. \tag{5.97}$$

6 ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

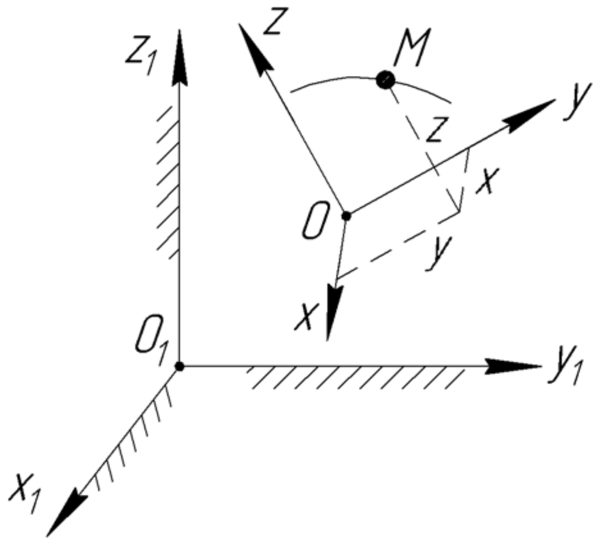


Рис. 6.1

Рассмотрим сложное движение точки M, состоящее из совокупности двух одновременно происходящих движений: относительного – относительно подвижной системы координат $Oxyz$ и переносного – как движение точки вместе с подвижной системой координат относительно неподвижной системы $O_1x_1y_1z_1$ (рис. 6.1).

Тогда основной закон динамики для относительного движения точки M будет иметь вид:

где $\overline{F}_e^u$ – переносная сила инерции;

$\overline{F}_c^u$ – кориолисова сила инерции.

Силы инерции соответственно равны:

$$\overline{F}_e^u = -m\overline{a}_e, \quad \overline{F}_c^u = -m\overline{a}_c. \tag{6.2}$$

Таким образом, *все уравнения и теоремы механики для относительного движения точки составляются так же, как уравнения абсолютного движения, если при этом к действующим на точку силам взаимодействия с другими телами прибавить переносную и кориолисову силы инерции*.

Частные случаи:

1. Если подвижная система движется относительно неподвижной поступательно:

$$m\overline{a}_r = \sum \overline{F}_k + \overline{F}_e^u. \tag{6.3}$$

2. Если подвижная система движется относительно неподвижной поступательно, равномерно и прямолинейно:

$$m\overline{a}_r = \sum \overline{F}_k. \tag{6.4}$$

Принцип относительности классической механики: *Никакими механическими опытами невозможно обнаружить, находится ли данная система отсчета в покое или совершает поступательное, равномерное и прямолинейное движение*.

3. Если точка по отношению к подвижной системе движется равномерно:

$$\sum \overline{F}_k + \overline{F}_e^u + \overline{F}_c^u = 0. \tag{6.5}$$

4. Если точка по отношению к подвижной системе находится в покое:

$$\sum \overline{F}_k + \overline{F}_e^{и} = 0 . \qquad (6.6)$$

Уравнение (6.6) называется *уравнением относительного покоя точки*.

Уравнения относительного покоя составляются так же, как уравнения равновесия в неподвижных осях, если при этом к действующим на точку силам взаимодействия с другими телами добавить переносную силу инерции.

Задача 6.1. Горизонтальный ротор центробежной рушки[1] вращается с постоянной угловой скоростью ω (рис. 6.2, *а*). Семена из бункера-накопителя через специальный питатель падают на него вертикально вниз на расстоянии l_1 от оси вращения, не получая при этом горизонтальной радиальной составляющей скорости. На расстоянии l_2 от оси вращения ротора семена, получившие определенные скорости, сходят с лопаток ротора и ударяются об обечайку, раскалываясь при этом.

Коэффициент трения семян подсолнечника о ротор при влажности 8% $f = 0{,}31$.

Найти закон движения семян относительно ротора, время движения по лопатке и относительную скорость семян.

Решение:

Рассмотрим движение отдельного семени вдоль лопатки ротора. Семечко заменим материальной точкой массы *m*.

Вектор $\overline{a}_r$ относительного ускорения точки будет направлен вдоль лопатки от оси вращения. Вектор $\overline{a}_e$ переносного ускорения при вращении ротора с постоянной угловой скоростью будет направлен к оси вращения. Вектор $\overline{a}_c$ кориолисова ускорения направлен по касательной к переносной траектории в сторону переносного вращения (рис. 6.2, *а*).

При движении на точку будут действовать сила тяжести $\overline{G}$, нормальные реакции горизонтальной ($\overline{N}_1$) и вертикальной ($\overline{N}_2$) поверхностей, силы трения $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ между семенем и поверхностями ротора, а также силы инерции – переносная $\overline{F}_e^{и}$ и кориолисова $\overline{F}_c^{и}$ (рис. 6.2, *б*). Направления векторов $\overline{F}_e^{и}$ и $\overline{F}_c^{и}$ противоположны направлениям векторов $\overline{a}_e$ и $\overline{a}_c$ соответственно. По модулю:

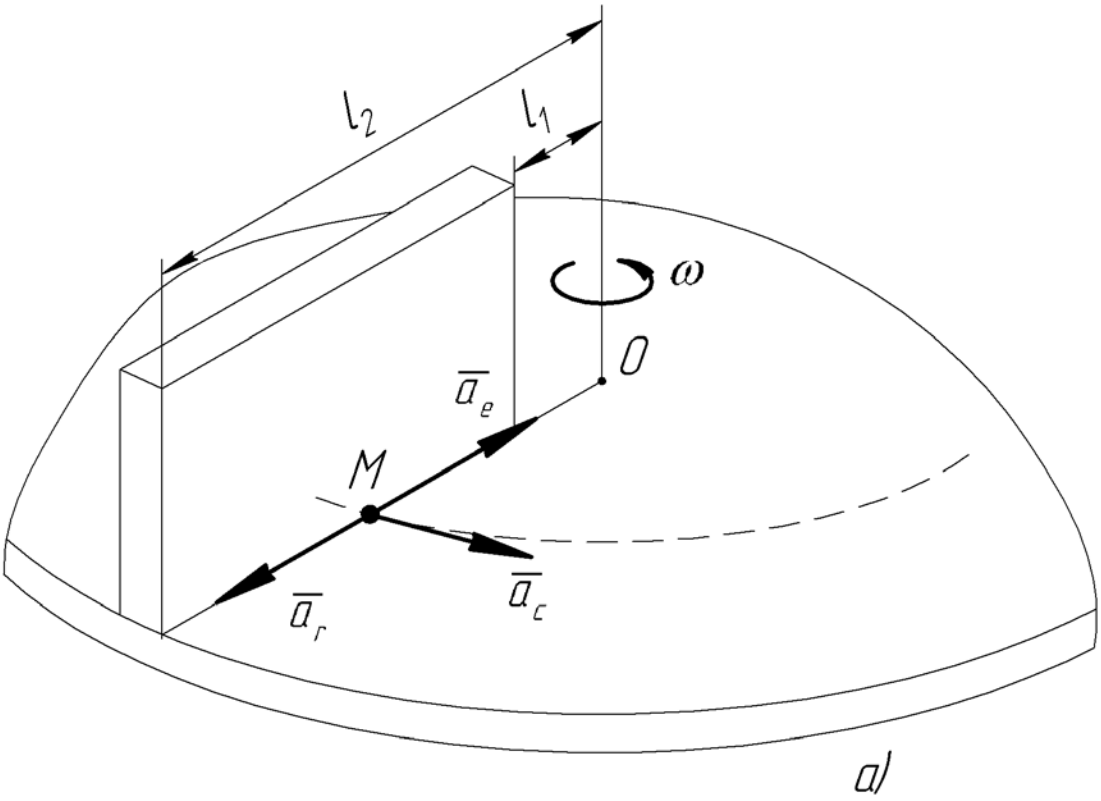
$$F_e^{и} = ma_e = m\omega^2 x , \quad F_c^{и} = 2m\omega \cdot \upsilon_r . \qquad (6.7)$$

где x – расстояние от точки до оси вращения ротора;

υ_r – относительная скорость точки.

---

[1] Рушка – машина для отделения ядрышек семян подсолнечника от семенной оболочки



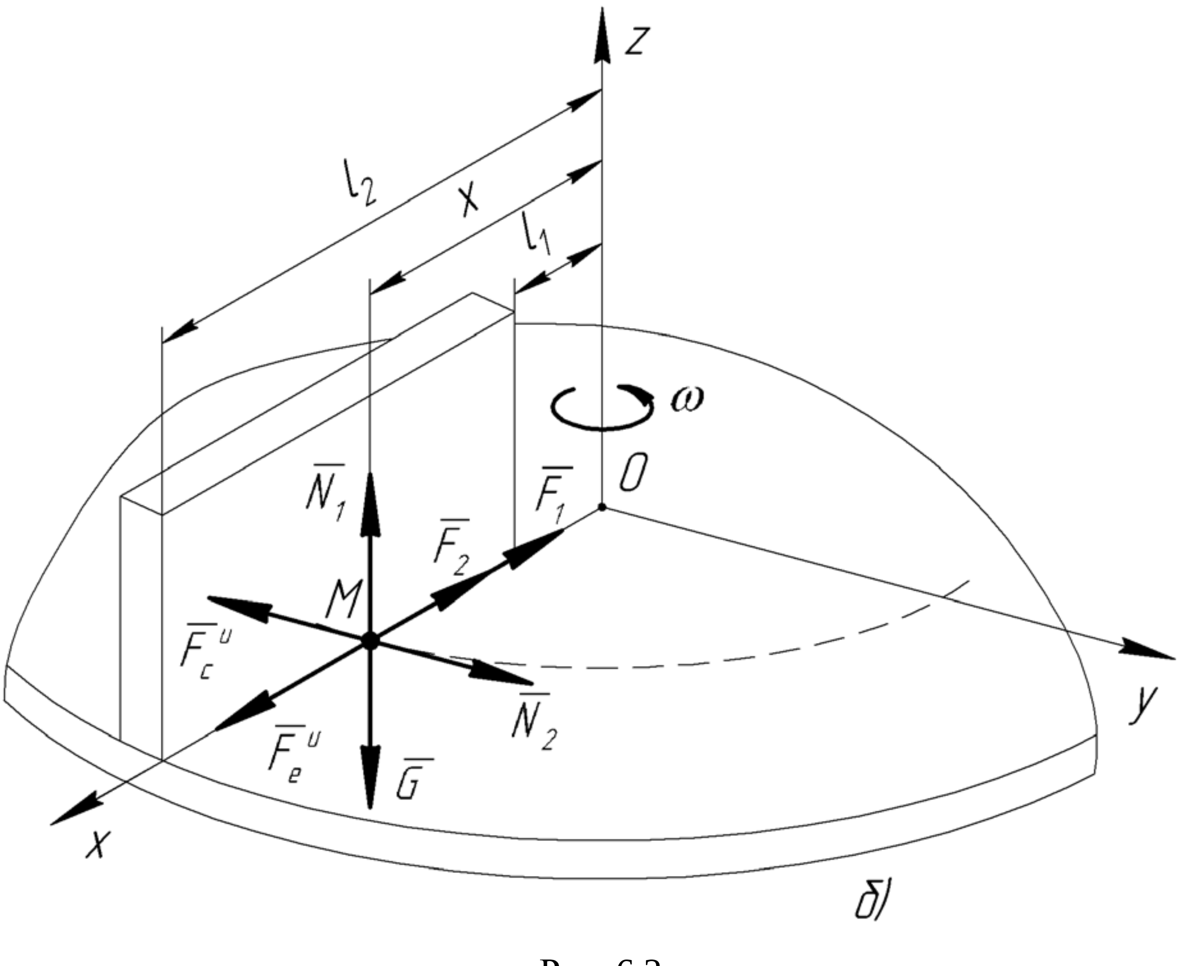


Рис. 6.2

Проведем подвижные оси *Oxyz*, неизменно связанные с ротором, и составим уравнение (6.1) относительного движения точки M в проекциях на эти оси:

на ось x: $$ma_r = F_e^u - F_1 - F_2, \tag{6.8}$$

на ось y: $$0 = N_2 - F_c^u, \tag{6.9}$$

на ось z: $$0 = N_1 - G. \tag{6.10}$$

Из уравнений (6.9) и (6.10) найдем значения нормальных реакций:

$$N_1 = G = mg, \quad N_2 = F_c^u = 2m\omega \cdot \upsilon_r. \tag{6.11}$$

Сила трения семени с горизонтальной поверхностью:

$$F_1 = fN_1 = fmg. \tag{6.12}$$

Сила трения с вертикальной поверхностью:

$$F_2 = fN_2 = 2fm\omega \cdot \upsilon_r. \tag{6.13}$$

Тогда уравнение (6.8) примет вид:

$$ma_r = m\omega^2 x - fmg - 2fm\omega \cdot \upsilon_r, \tag{6.14}$$

или

$$a_r = \omega^2 x - fg - 2f\omega \cdot \upsilon_r. \tag{6.15}$$

Преобразуем полученное уравнение, учитывая, что $a_r = \ddot{x}$, $\upsilon_r = \dot{x}$:

$$\ddot{x} + 2f\omega\dot{x} - \omega^2 x = -fg. \tag{6.16}$$

Общее решение полученного неоднородного уравнения равно:

$$x = x_1 + x_2, \tag{6.17}$$

где x_1 – общее решение однородного уравнения;

x_2 – частное решение неоднородного уравнения.

Чтобы найти x_1, составим характеристическое уравнение:

$$r^2 + 2f\omega \cdot r - \omega^2 = 0, \tag{6.18}$$

корни которого равны:

$$r_{1,2} = -f\omega \pm \sqrt{f^2\omega^2 + \omega^2} = \omega\left(-f \pm \sqrt{f^2 + 1}\right), \tag{6.19}$$

$$r_1 = \omega\left(\sqrt{f^2 + 1} - f\right), \quad r_2 = -\omega\left(\sqrt{f^2 + 1} + f\right). \tag{6.20}$$

При заданном значении $f = 0{,}31$:

$$r_1 = \omega\left(\sqrt{0{,}31^2 + 1} - 0{,}31\right) = 0{,}74\omega, \tag{6.21}$$

$$r_2 = -\omega\left(\sqrt{0{,}31^2 + 1} + 0{,}31\right) = -1{,}36\omega. \tag{6.22}$$

Тогда общее решение однородного уравнения:

$$x_1 = C_1 e^{0{,}74\omega t} + C_2 e^{-1{,}36\omega t}. \tag{6.23}$$

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде постоянной величины:

$$x_2 = A, \quad \dot{x}_2 = 0, \quad \ddot{x}_2 = 0. \tag{6.24}$$

Полученные значения подставим в уравнение (6.16):

$$-\omega^2 A = -fg\,, \tag{6.25}$$

откуда

$$A = \frac{fg}{\omega^2}. \tag{6.26}$$

Тогда общее решение будет иметь вид:

$$x = C_1 e^{0,74\omega t} + C_2 e^{-1,36\omega t} + \frac{fg}{\omega^2}. \tag{6.27}$$

Продифференцируем уравнение (6.27):

$$\dot{x} = 0,74\omega C_1 e^{0,74\omega t} - 1,36\omega C_2 e^{-1,36\omega t}. \tag{6.28}$$

Подставим в уравнения (6.27) и (6.28) начальные условия ($t = 0$, $x = l_1$, $\upsilon_r = 0$):

$$l_1 = C_1 + C_2 + \frac{fg}{\omega^2}, \tag{6.29}$$

$$0 = 0,74\omega C_1 - 1,36\omega C_2. \tag{6.30}$$

Выражаем из равенства (6.30):

$$C_2 = \frac{0,74}{1,36} C_1 = 0,54 C_1, \tag{6.31}$$

и подставляем в (6.29):

$$l_1 = C_1 + 0,54 C_1 + \frac{fg}{\omega^2}. \tag{6.32}$$

Тогда постоянные интегрирования будут равны:

$$C_1 = \frac{l_1\omega^2 - fg}{1,54\omega^2} = 0,65 \cdot \frac{l_1\omega^2 - fg}{\omega^2}, \tag{6.33}$$

$$C_2 = 0,35 \cdot \frac{l_1\omega^2 - fg}{\omega^2}. \tag{6.34}$$

Подставляем найденные постоянные в уравнение (6.27), получим закон относительного движения точки:

$$x = \frac{l_1\omega^2 - fg}{\omega^2} \cdot \left(0,65 e^{0,74\omega t} + 0,35 e^{-1,36\omega t}\right) + \frac{fg}{\omega^2}. \tag{6.35}$$

Чтобы найти время T движения семени по лопатке, подставим в уравнение (6.35) конечные условия ($t = T$, $x = l_2$):

$$l_2 = \frac{l_1\omega^2 - fg}{\omega^2} \cdot \left(0,65 e^{0,74\omega T} + 0,35 e^{-1,36\omega T}\right) + \frac{fg}{\omega^2}. \tag{6.36}$$

Пренебрегаем вследствие малости вторым слагаемым в скобках и выполняем преобразования:

$$0,65 e^{0,74\omega T} = \frac{l_2\omega^2 - fg}{l_1\omega^2 - fg}. \tag{6.37}$$

Прологарифмируем полученное уравнение:

$$\ln 0,65 + 0,74\omega T = \ln\frac{l_2\omega^2 - fg}{l_1\omega^2 - fg}, \quad (6.38)$$

и найдем время движения семени по лопатке:

$$T = \frac{1}{0,74\omega}\left(\ln\frac{l_2\omega^2 - fg}{l_1\omega^2 - fg} - \ln 0,65\right). \quad (6.39)$$

Закон изменения относительной скорости точки найдем, подставив значения C_1 и C_2 в уравнение (6.28):

$$\begin{aligned} \upsilon_r = \dot{x} = \frac{l_1\omega^2 - fg}{\omega}\left(0,74\cdot 0,65\cdot e^{0,74\omega t} - 1,36\cdot 0,35\cdot e^{-1,36\omega t}\right) \approx \\ \approx 0,48\frac{l_1\omega^2 - fg}{\omega}\left(e^{0,74\omega t} - e^{-1,36\omega t}\right) \approx 0,88e^{\omega t}\cdot\frac{l_1\omega^2 - fg}{\omega}. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Задача 6.2. В вагоне, движущемся по прямолинейному горизонтальному пути, маятник совершает малые гармонические колебания, причем среднее его положение остается отклоненным от вертикали на угол $\varphi_0 = 6°$.

Определить ускорение вагона, а также найти разность периодов колебаний маятника $\Delta T = T - T_1$ (T – период колебаний в случае неподвижного вагона, T_1 – при движении вагона).

Решение:

Математический маятник представляет собой груз малых размеров, принимаемый за материальную точку и подвешенный на невесомой и нерастяжимой нити.

1. Рассмотрим колебания маятника в неподвижном вагоне. В этом случае к точке будут приложена сила тяжести $\overline{G} = m\overline{g}$ и сила натяжения нити $\overline{T}$ (рис. 6.3, *а*).

Обозначая угол наклона нити маятника к вертикали φ, составим дифференциальное уравнение движения точки в проекции на касательную:

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = -mg\sin\varphi, \quad (6.41)$$

или

$$\frac{d\upsilon}{dt} = -g\sin\varphi. \quad (6.42)$$

Скорость точки равна:

$$\upsilon = \omega l = \dot{\varphi} l, \quad (6.43)$$

где $\omega = \dot{\varphi}$ – угловая скорость нити маятника;

l – длина нити.

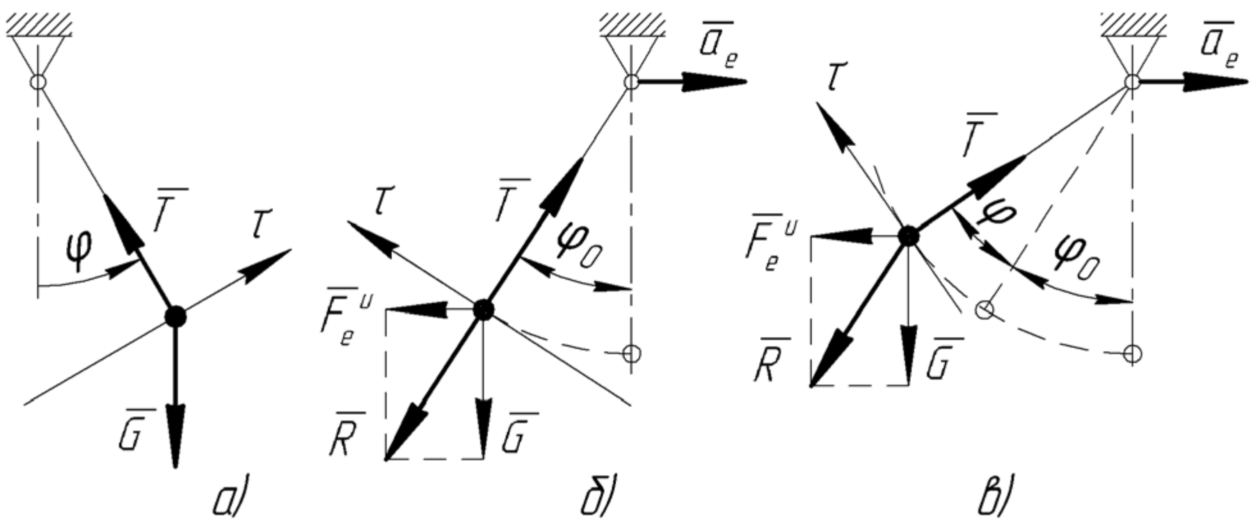


Рис. 6.3

Тогда:

$$\frac{d}{dt}(\dot{\varphi}l) = -g\sin\varphi, \tag{6.44}$$

$$\ddot{\varphi}l = -g\sin\varphi. \tag{6.45}$$

Учитывая, что при малых колебаниях $\sin\varphi \approx \varphi$, получим:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0. \tag{6.46}$$

Обозначив здесь $\sqrt{g/l} = k^2$, найдем период колебаний маятника:

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{6.47}$$

2. При движении вагона с ускорением $\overline{a}_e$ нить маятника отклонится на угол $\varphi_0 = 6°$ (сам маятник до начала движения находился в покое). К действующим на точку силам $\overline{G}$ и $\overline{T}$ добавим переносную силу инерции $\overline{F}_e^u$ (рис. 6.3, *б*), которая будет направлена в сторону противоположную вектору $\overline{a}_e$, а по модулю:

$$F_e^u = ma_e. \tag{6.48}$$

В данном случае имеет место относительное равновесие маятника – сила $\overline{T}$ будет уравновешена силой $\overline{R}$, являющейся равнодействующей сил $\overline{G}$ и $\overline{F}_e^u$. Тогда:

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{F_e^u}{G} = \frac{ma_e}{mg} = \frac{a_e}{g}, \tag{6.49}$$

откуда найдем ускорение вагона:

$$a_e = g \cdot \operatorname{tg}\varphi_0 = 9{,}8 \cdot 0{,}105 = 1{,}03\ м/с^2. \tag{6.50}$$

Отметим, что

$$R=\sqrt{\left(F_e^{и}\right)^2+G^2}=m\sqrt{a_e^2+g^2}\,, \tag{6.51}$$

$$\sin\varphi_0=\frac{F_e^{и}}{R}=\frac{a_e}{\sqrt{a_e^2+g^2}}, \tag{6.52}$$

$$\cos\varphi_0=\frac{G}{R}=\frac{g}{\sqrt{a_e^2+g^2}}. \tag{6.53}$$

3. Рассмотрим малые колебания маятника при движении вагона с ускорением $\overline{a}_e$. В этом случае обозначим φ – угол отклонения нити от положения относительного равновесия (рис. 6.3, *в*).

Дифференциальное уравнение движения точки в проекции на касательную:

$$m\frac{d\upsilon}{dt}=ma_e\cos\left(\varphi+\varphi_0\right)-mg\sin\left(\varphi+\varphi_0\right), \tag{6.54}$$

или с учетом выражения (6.43):

$$\ddot{\varphi}l=a_e\cos\left(\varphi+\varphi_0\right)-g\sin\left(\varphi+\varphi_0\right). \tag{6.55}$$

Учитывая, что

$$\cos\left(\varphi+\varphi_0\right)=\cos\varphi\cos\varphi_0-\sin\varphi\sin\varphi_0, \tag{6.56}$$

$$\sin\left(\varphi+\varphi_0\right)=\sin\varphi\cos\varphi_0+\cos\varphi\sin\varphi_0. \tag{6.57}$$

получим:

$$\ddot{\varphi}l=a_e\left(\cos\varphi\cos\varphi_0-\sin\varphi\sin\varphi_0\right)-g\left(\sin\varphi\cos\varphi_0+\cos\varphi\sin\varphi_0\right). \tag{6.58}$$

Подставим сюда $\sin\varphi\approx\varphi$, $\cos\varphi\approx 1$, а также выражения (6.52) и (6.53):

$$\ddot{\varphi}l=a_e\frac{g}{\sqrt{a_e^2+g^2}}-a_e\varphi\frac{a_e}{\sqrt{a_e^2+g^2}}-\mathrm{g}\varphi\frac{g}{\sqrt{a_e^2+g^2}}-g\frac{a_e}{\sqrt{a_e^2+g^2}}, \tag{6.58}$$

$$\ddot{\varphi}l=-\varphi\frac{a_e^2+g^2}{\sqrt{a_e^2+g^2}}, \tag{6.59}$$

$$\ddot{\varphi}l+\varphi\sqrt{a_e^2+g^2}=0, \tag{6.60}$$

$$\ddot{\varphi}+\varphi\frac{\sqrt{a_e^2+g^2}}{l}=0. \tag{6.61}$$

Обозначив здесь $\dfrac{\sqrt{a_e^2+g^2}}{l}=k_1^2$, найдем период колебаний маятника при движении вагона:

$$T_1=\frac{2\pi}{k_1}=2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{a_e^2+g^2}}}\,. \tag{6.62}$$

Тогда разность периодов:

$$\Delta T = T - T_1 = T\left(1-\frac{T_1}{T}\right) = T\left(1-\frac{\sqrt{l/\sqrt{a_e^2+g^2}}}{\sqrt{l/g}}\right) = T\left(1-\sqrt{\frac{1}{\sqrt{\left(a_e^2/g^2\right)+1}}}\right) =$$

$$= T\left(1-\sqrt{\frac{1}{\sqrt{\left(1{,}03^2/9{,}8^2\right)+1}}}\right) = 0{,}0027T\,. \qquad (6.63)$$

Задача 6.3. К потолку неподвижного лифта прикреплена пружина жесткостью $c = 162\ Н/м$ с грузом массой $m = 0{,}3\ кг$. Груз совершает гармонические колебания. Как изменится расстояние от точки подвеса пружины до центра колебаний груза при поступательном движении лифта вверх по вертикали с постоянным ускорением $a = 2{,}7\ м/с^2$?

Решение:

1) В случае неподвижного лифта колебания груза описываются уравнением (начальные условия $x = x_0$, $\upsilon_0 = 0$):

$$x = x_0 \cos kt\,, \qquad (6.64)$$

где k – круговая частота колебаний, с$^{-1}$.

Круговую частоту найдем по формуле:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{162}{0{,}3}} = 23{,}2\ c^{-1}. \qquad (6.65)$$

Рис. 6.4

2) Теперь рассмотрим колебания груза в лифте, движущемся вверх с ускорением $a_e = a$. В этом случае к действующим на груз силам тяжести $\bar{G}$ и упругости $\bar{F}$ добавляем переносную силу инерции $\bar{F}_e^u$ (рис. 6.4). Тогда дифференциальное уравнение движения груза:

$$ma_r = G - F + F_e^u\,, \qquad (6.66)$$

или

$$m\ddot{x} = mg - c\left(\lambda_{cm} + x\right) + ma\,. \qquad (6.67)$$

Учитывая, что $mg = c\lambda_{cm}$, и $c/m = k^2$, получим:

$$\ddot{x} + k^2 x = a\,. \qquad (6.68)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$x = x_1 + x_2\,, \qquad (6.69)$$

где $x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ – общее решение однородного уравнения;

$x_2 = B$ – частное решение неоднородного уравнения.

Подставив в уравнение (6.16) $x_2 = B$, $\ddot{x}_2 = 0$, получим:

$$k^2 B = a, \quad (6.70)$$

откуда

$$B = \frac{a}{k^2}. \quad (6.71)$$

Тогда уравнение относительного движения маятника:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{a}{k^2}. \quad (6.72)$$

Продифференцируем по времени уравнение (6.72):

$$\upsilon = \dot{x} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt. \quad (6.73)$$

Подставляя в уравнения (6.72) и (6.73) начальные условия ($t = 0$, $x = x_0$, $\upsilon_0 = 0$), найдем постоянные интегрирования:

$$C_1 = x_0 - \frac{a}{k^2}, \quad C_2 = 0. \quad (6.74)$$

Окончательно получим:

$$x = \left(x_0 - \frac{a}{k^2} \right) \cos kt + \frac{a}{k^2}. \quad (6.75)$$

Сравнивая равенства (6.64) и (6.75), можем сделать вывод, что при движении лифта вверх центр колебаний сместился вниз на величину

$$\Delta = \frac{a}{k^2} = \frac{2,7}{23,2^2} = 0,005\ м. \quad (6.76)$$

Задача 6.4. Точка O_1 подвеса маятника длины l совершает прямолинейные горизонтальные гармонические колебания около неподвижной точки O (рис. 6.5). Расстояние $OO_1 = b \sin pt$ (b и p – постоянные величины). Определить малые колебания маятника, если в начальный момент времени он находился в покое.

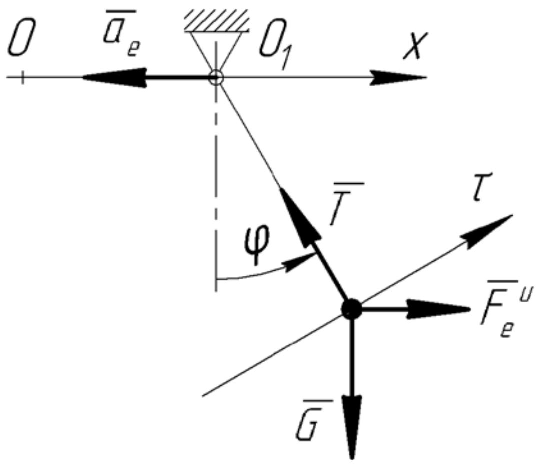


Рис. 6.5

Решение:

Колебания точки привеса около точки O – это переносное движение. Закон этого движения:

$$x_e = OO_1 = b \sin pt. \quad (6.77)$$

Найдем ускорение точки привеса:

$$\dot{x}_e = bp \cos pt, \quad (6.78)$$

$$a_e = \ddot{x}_e = -bp^2 \sin pt. \quad (6.79)$$

Таким образом, ускорение точки привеса и координата x_e имеют противоположные знаки, а вектор $\bar{a}_e$ будет направлен к точке O.

К действующим на маятник силам $\overline{G} = m\overline{g}$ и $\overline{T}$ присоединим переносную силу инерции $\overline{F}_e^u$, направив ее противоположно вектору $\overline{a}_e$. По модулю:

$$F_e^u = ma_e = mbp^2 \sin pt. \tag{6.80}$$

Составим дифференциальное уравнение движения маятника в проекции на касательную:

$$m\dot{\upsilon} = mbp^2 \sin pt \cos\varphi - mg\sin\varphi. \tag{6.81}$$

Учитывая, что $\upsilon = \omega l = \dot{\varphi} l$, $\dot{\upsilon} = \ddot{\varphi} l$, получим:

$$\ddot{\varphi} l = bp^2 \sin pt \cos\varphi - g\sin\varphi. \tag{6.82}$$

Для малых колебаний маятника $\cos\varphi \approx 1$, $\sin\varphi \approx \varphi$. Тогда:

$$\ddot{\varphi} l = bp^2 \sin pt - g\varphi, \tag{6.83}$$

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = \frac{bp^2}{l}\sin pt, \tag{6.84}$$

где $k = \sqrt{g/l}$ – частота свободных колебаний.

Общее решение полученного неоднородного уравнения:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \tag{6.85}$$

где $\varphi_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ – общее решение однородного уравнения;

φ_2 – частное решение неоднородного уравнения.

Последнее будем искать в виде:

$$\varphi_2 = A\sin pt. \tag{6.86}$$

Найдем вторую производную:

$$\dot{\varphi}_2 = Ap\cos pt, \quad \ddot{\varphi}_2 = -Ap^2 \sin pt, \tag{6.87}$$

и подставим полученные данные в уравнение (6.84):

$$-Ap^2 \sin pt + k^2 A\sin pt = \frac{bp^2}{l}\sin pt. \tag{6.88}$$

Отсюда найдем:

$$A = \frac{bp^2}{l\left(k^2 - p^2\right)}, \tag{6.89}$$

$$\varphi_2 = \frac{bp^2}{l\left(k^2 - p^2\right)}\sin pt. \tag{6.90}$$

Тогда общее решение уравнения (6.84):

$$\varphi = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{bp^2}{l\left(k^2 - p^2\right)}\sin pt. \tag{6.91}$$

Продифференцируем полученное уравнение по времени:

$$\dot{\varphi} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt + \frac{bp^3}{l\left(k^2 - p^2\right)}\cos pt. \tag{6.92}$$

Подставим в последние два уравнения начальные условия ($t=0$, $\varphi=0$, $\dot{\varphi}=0$) и найдем постоянные интегрирования:

$$C_1=0,\quad C_2=-\frac{bp^3}{kl\left(k^2-p^2\right)}. \tag{6.93}$$

Тогда уравнение малых колебаний маятника примет вид:

$$\varphi=-\frac{bp^3}{kl\left(k^2-p^2\right)}\sin kt+\frac{bp^2}{l\left(k^2-p^2\right)}\sin pt, \tag{6.94}$$

или

$$\varphi=\frac{bp^2}{l\left(k^2-p^2\right)}\left(\sin pt-\frac{p}{k}\sin kt\right). \tag{6.95}$$

Задача 6.5. Шарик массы *m*, прикрепленный к концу горизонтальной пружины, коэффициент жесткости которой *c*, находится в положении равновесия в трубе на расстоянии *l* от вертикальной оси (рис. 6.6). Определить относительное движение шарика, если трубка, образующая с осью прямой угол, начинает вращаться вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω.

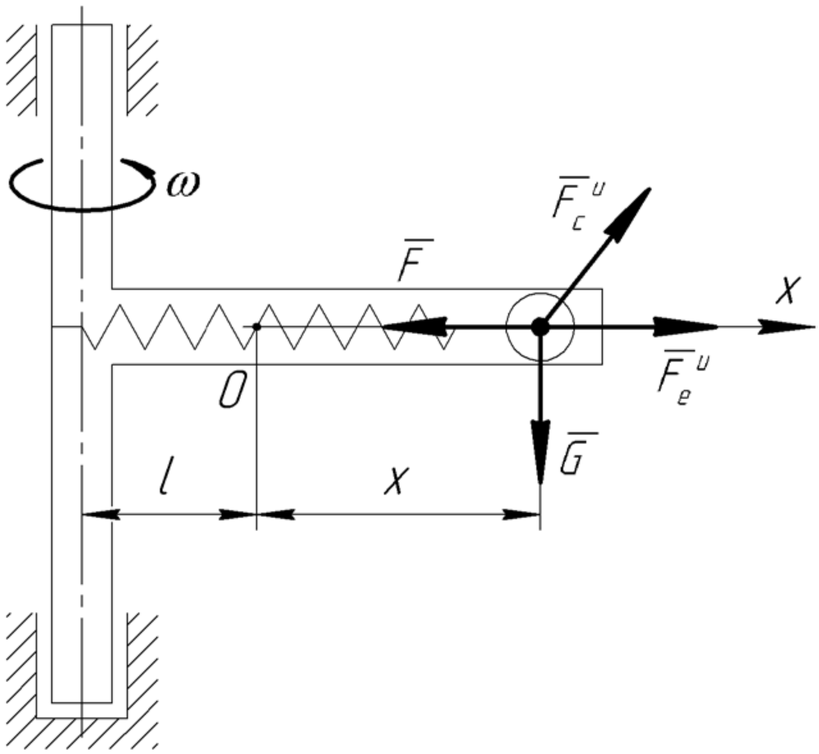


Рис. 6.6

Решение:

К действующим на шарик силам упругости $F=-cx$ и тяжести $G=mg$ добавим силы инерции: переносную $F_e^u=m\omega^2\left(l+x\right)$ и кориолисову $F_c^u = 2m\omega\upsilon_r$.

Составим дифференциальное уравнение движения шарика в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = F_e^u - F\,, \tag{6.96}$$

или

$$m\ddot{x} = m\omega^2\left(l + x\right) - cx\,. \tag{6.97}$$

Выполним преобразования:

$$\ddot{x} = \omega^2 l + \omega^2 x - \frac{c}{m}x\,. \tag{6.98}$$

Обозначив $c/m = k^2$, получим:

$$\ddot{x} + \left(k^2 - \omega^2\right)x = \omega^2 l\,. \tag{6.99}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$x = x_1 + x_2\,, \tag{6.100}$$

где x_1 – общее решение однородного уравнения;

x_2 – частное решение неоднородного уравнения.

Составим характеристическое уравнение:

$$r^2 + \left(k^2 - \omega^2\right) = 0\,, \tag{6.101}$$

корни которого:

$$r_{1,2} = \pm\sqrt{\omega^2 - k^2}\,. \tag{6.102}$$

Рассмотрим два случая.

1) Когда $k > \omega$, корни характеристического уравнения будут мнимыми:

$$r_{1,2} = \pm i\sqrt{k^2 - \omega^2}\,. \tag{6.103}$$

Тогда:

$$x_1 = C_1\cos\sqrt{k^2 - \omega^2}\,t + C_2\sin\sqrt{k^2 - \omega^2}\,t\,, \tag{6.104}$$

$$x_2 = A\,. \tag{6.105}$$

Подставляя $x_2 = A$, $\ddot{x}_2 = 0$ в уравнение (6.99), получим:

$$A = \frac{\omega^2 l}{k^2 - \omega^2}\,. \tag{6.106}$$

Тогда общее решение будет иметь вид:

$$x = C_1\cos\sqrt{k^2 - \omega^2}\,t + C_2\sin\sqrt{k^2 - \omega^2}\,t + \frac{\omega^2 l}{k^2 - \omega^2}\,. \tag{6.107}$$

Продифференцируем полученное уравнение по времени:

$$\dot{x} = -C_1\sqrt{k^2 - \omega^2}\sin\sqrt{k^2 - \omega^2}\,t + C_2\sqrt{k^2 - \omega^2}\cos\sqrt{k^2 - \omega^2}\,t\,. \tag{6.108}$$

Подставим в последние два уравнения начальные условия ($t = 0$, $x = 0, \upsilon_r = 0$) и найдем постоянные интегрирования:

$$C_1 = -\frac{\omega^2 l}{k^2 - \omega^2}, \quad C_2 = 0. \tag{6.109}$$

Тогда:

$$x = -\frac{\omega^2 l}{k^2 - \omega^2}\cos\sqrt{k^2 - \omega^2}\,t + \frac{\omega^2 l}{k^2 - \omega^2}. \tag{6.110}$$

Учитывая, что

$$1 - \cos\sqrt{k^2 - \omega^2}\,t = 2\sin^2\frac{\sqrt{k^2 - \omega^2}\,t}{2}, \tag{6.111}$$

окончательно получим уравнение движение шарика при $k > \omega$:

$$x = \frac{2\omega^2 l}{k^2 - \omega^2}\sin^2\frac{\sqrt{k^2 - \omega^2}\,t}{2}. \tag{6.112}$$

2) Если $k < \omega$, то корни характеристического уравнения будут действительными:

$$r_1 = \sqrt{\omega^2 - k^2}, \quad r_2 = -\sqrt{\omega^2 - k^2}. \tag{6.113}$$

В этом случае:

$$x_1 = C_1\,\mathrm{e}^{\sqrt{\omega^2 - k^2}\,t} + C_2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\omega^2 - k^2}\,t}, \tag{6.114}$$

$$x_2 = A = \frac{\omega^2 l}{k^2 - \omega^2} = -\frac{\omega^2 l}{\omega^2 - k^2}, \tag{6.115}$$

$$x = C_1\,\mathrm{e}^{\sqrt{\omega^2 - k^2}\,t} + C_2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\omega^2 - k^2}\,t} - \frac{\omega^2 l}{\omega^2 - k^2}. \tag{6.116}$$

Продифференцируем по времени уравнение (6.116):

$$\dot{x} = C_1\sqrt{\omega^2 - k^2}\,\mathrm{e}^{\sqrt{\omega^2 - k^2}\,t} - C_2\sqrt{\omega^2 - k^2}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\omega^2 - k^2}\,t}. \tag{6.117}$$

Подставим в уравнения (6.116) и (6.117) начальные условия ($t = 0$, $x = 0$, $\upsilon_r = 0$):

$$0 = C_1 + C_2 - \frac{\omega^2 l}{\omega^2 - k^2}, \tag{6.118}$$

$$0 = C_1\sqrt{\omega^2 - k^2} - C_2\sqrt{\omega^2 - k^2}. \tag{6.119}$$

Решим полученную систему и найдем постоянные интегрирования:

$$C_1 = C_2 = \frac{\omega^2 l}{2\left(\omega^2 - k^2\right)}. \tag{6.120}$$

Тогда:

$$x = \frac{\omega^2 l}{2\left(\omega^2 - k^2\right)}\mathrm{e}^{\sqrt{\omega^2 - k^2}\,t} + \frac{\omega^2 l}{2\left(\omega^2 - k^2\right)}\mathrm{e}^{-\sqrt{\omega^2 - k^2}\,t} - \frac{\omega^2 l}{\omega^2 - k^2}. \tag{6.121}$$

Учитывая, что:

$$\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{\omega^2 - k^2}\,t} + \mathrm{e}^{-\sqrt{\omega^2 - k^2}\,t}}{2} = \mathrm{ch}\sqrt{\omega^2 - k^2}\,t, \tag{6.122}$$

окончательно получим уравнение движение шарика при $k < \omega$:

$$x = \frac{\omega^2 l}{\omega^2 - k^2}\left(\operatorname{ch}\sqrt{\omega^2 - k^2}t - 1\right). \qquad (6.123)$$

Задача 6.6. Тележка массой m_1, транспортирующая груз массой m_2, ударяет с начальной скоростью υ_0 в пружинный амортизатор жесткостью ***c***, закрепленный на неподвижной стене (рис. 6.7, *а*). Определить коэффициент трения скольжения между грузом и тележкой, при котором бы груз остался в покое после удара.

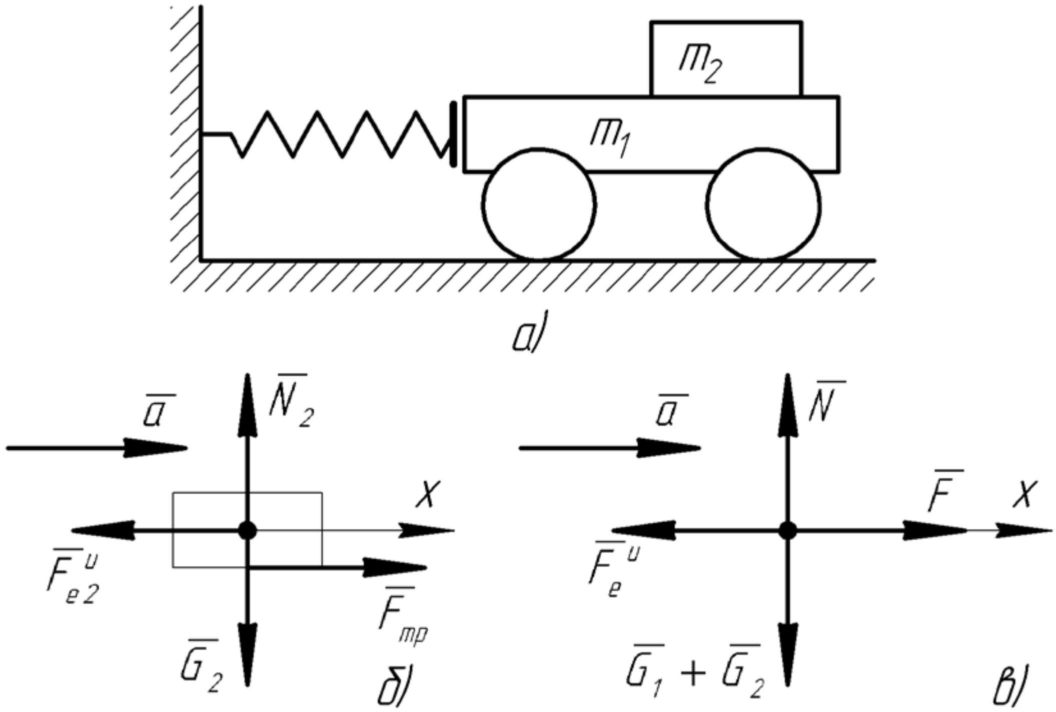


Рис. 6.7

Решение:

Во время удара тележки об амортизатор груз не будет перемещаться по отношению к тележке, если будет наблюдаться относительное равновесие, т.е. переносная сила инерции будет уравновешена силой трения между тележкой и грузом (рис. 6.7, *б*):

$$F_{mp} - F_{e2}^{u} = 0. \qquad (6.124)$$

Сила трения:

$$F_{mp} \le fN_2, \qquad (6.125)$$

или

$$F_{mp} \le fm_2 g. \qquad (6.126)$$

Переносная сила инерции:

$$F_{e2}^{u} = m_2 a_{\max}, \qquad (6.127)$$

где $a_{\max}$ – максимальное значение ускорения груза; поскольку груз относительно тележки неподвижен, то ускорение для тележки и для груза будет одинаково.

Подставляя полученные выражения в уравнение (6.124), получим:

$$f \ge \frac{a_{\max}}{g}. \tag{6.128}$$

Чтобы найти $a_{\max}$, рассмотрим движение тележки вместе с грузом как движение материальной точки, к которой приложены сила тяжести $G = (m_1 + m_2)g$, нормальная реакция поверхности N, сила упругости пружины $F = c \cdot (-x)$ и переносная сила инерции $F_e^u = (m_1 + m_2)\ddot{x}$ (рис. 6.7, *в*). Здесь x – это деформация пружины амортизатора (рис. 6.7, *а*). Силы трения между грузом и тележкой будут являться внутренними силами для системы «тележка-груз», поэтому здесь они учитываться не будут[1].

Составим дифференциальное уравнение движение точки в проекции на ось x:

$$F - F_e^u = 0, \tag{6.129}$$

или с учетом значений сил

$$c \cdot (-x) - (m_1 + m_2)\ddot{x} = 0. \tag{6.130}$$

Отсюда получим:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \tag{6.131}$$

где $k = \sqrt{\dfrac{c}{m_1 + m_2}}$.

Характеристическое уравнение:

$$r^2 + k^2 = 0, \tag{6.132}$$

а его корни $r_{1,2} = \pm ik$ – мнимые. Тогда решение уравнения (6.23) имеет вид:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \tag{6.133}$$

Дифференцируем это уравнение по времени:

$$\dot{x} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt. \tag{6.134}$$

Подставим начальные условия ($t = 0,\ x = 0,\ \dot{x} = \upsilon_0$) и найдем постоянные интегрирования:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{\upsilon_0}{k}. \tag{6.135}$$

Тогда получим уравнение движения тележки с грузом:

$$x = \frac{\upsilon_0}{k} \sin kt. \tag{6.136}$$

Дважды продифференцируем уравнение и найдем ускорение:

---

[1] По сути, рассматривая систему как материальную точку, мы применили теорему о движении центра масс.

$$\upsilon = \dot{x} = \upsilon_0 \cos kt\,, \tag{6.137}$$

$$a = \ddot{x} = -\upsilon_0 k \sin kt\,. \tag{6.138}$$

Максимальное значение ускорение примет при $\sin kt = -1$:

$$a_{\max} = \upsilon_0 k\,. \tag{6.139}$$

Тогда искомый коэффициент трения:

$$f \geq \frac{\upsilon_0 k}{g}\,, \tag{6.140}$$

или

$$f \geq \frac{\upsilon_0}{g}\sqrt{\frac{c}{m_1 + m_2}}\,. \tag{6.141}$$

7 ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Количество движения точки. *Количеством движения материальной точки называется векторная величина $m\bar{\upsilon}$, равная произведению массы точки на ее скорость.*

Количество движения измеряется в *Н·с* (ньютон-секундах).

Направление вектора количества движения точки $m\bar{\upsilon}$ совпадает с направлением вектора скорости $\bar{\upsilon}$ (рис. 7.1).

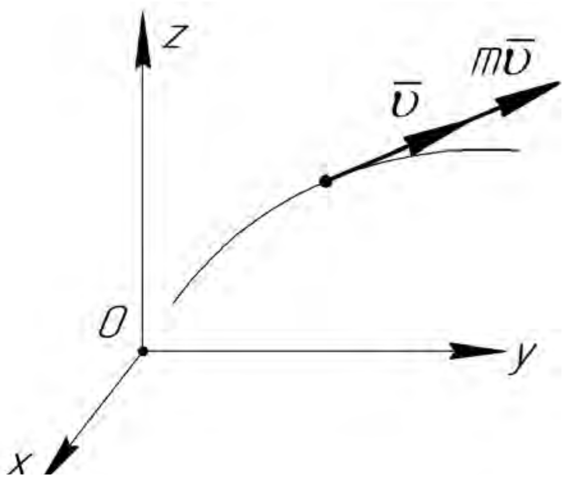


Рис. 7.1

Проекции вектора количества движения точки на оси координат:

$$\left(m\bar{\upsilon}\right)_x = m\upsilon_x, \quad \left(m\bar{\upsilon}\right)_y = m\upsilon_y, \quad \left(m\bar{\upsilon}\right)_z = m\upsilon_z. \qquad (7.1)$$

Импульс силы. *Элементарным импульсом силы называется векторная величина $d\bar{s}$, равная произведению силы $\bar{F}$ на элементарный промежуток времени dt*:

$$d\bar{s} = \bar{F}dt. \qquad (7.2)$$

Импульс силы за некоторый промежуток времени t равен определенному интегралу от элементарного импульса, взятому в пределах от 0 до t:

$$\bar{S} = \int_0^t \bar{F}dt. \qquad (7.3)$$

В случае, если $\bar{F} = const$, то импульс силы определяется по формуле:

$$\bar{S} = \bar{F}t. \qquad (7.4)$$

Импульс силы, как и количество движения, измеряется в *Н·с*.

Проекции импульса силы на координатные оси:

$$S_x = \int_0^t F_x dt, \quad S_y = \int_0^t F_y dt, \quad S_z = \int_0^t F_z dt, \qquad (7.5)$$

или в случае $\bar{F} = const$:

$$S_x = F_x t,\quad S_y = F_y t,\quad S_z = F_z t. \tag{7.6}$$

Теорема об изменении количества движения точки. *Изменение количества движения точки за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов всех действующих на точку сил за тот же промежуток времени:*

$$m\bar{\upsilon} - m\bar{\upsilon}_0 = \sum \bar{S}_k. \tag{7.7}$$

Теорема об изменении количества движения точки в проекциях на оси координат:

$$m\upsilon_x - m\upsilon_{0x} = \sum S_{kx},\quad m\upsilon_y - m\upsilon_{0y} = \sum S_{ky},\quad m\upsilon_z - m\upsilon_{0z} = \sum S_{kz}. \tag{7.8}$$

С помощью теоремы об изменении количества движения точки решаются следующие задачи:

1) Зная, как при движении точки изменяется ее скорость, определить импульс действующих на нее сил (первая задача динамики).

2) Зная импульсы действующих сил, определить, как изменяется при движении скорость точки (вторая задача динамики). Это возможно лишь тогда, когда силы постоянны или зависят только от времени: $\bar{F} = const$, $\bar{F} = f(t)$.

Задача 7.1. Поезд движется по горизонтальному и прямолинейному участку пути. При торможении развивается сила сопротивления, равная 0,1 веса поезда. В момент начала торможения скорость поезда 72 *км/ч*. Найти время торможения.

Решение.

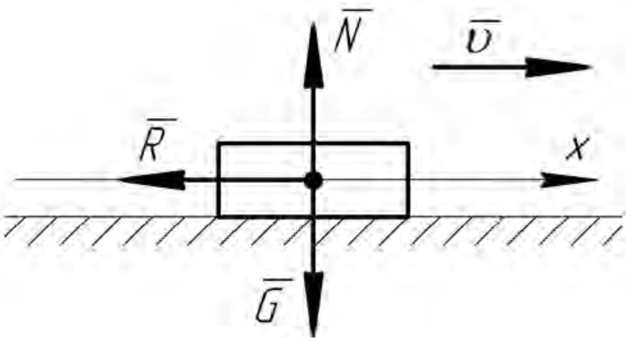


Рис. 7.2

Поезд принимаем за материальную точку, показываем все действующие на нее силы: силу тяжести $\bar{G}$, силу сопротивления $\bar{R}$ и нормальную реакцию поверхности $\bar{N}$ (рис. 7.2). Ось x направляем в сторону движения.

Воспользуемся теоремой об изменении количества движения точки в проекции на ось x:

Проекции соответственно конечной и начальной скорости точки:

$$\upsilon_x = \upsilon = 0,\quad \upsilon_{0x} = \upsilon_0 = 72\ км/ч = 20\ м/с. \tag{7.10}$$

Т.к. проекции импульса сил $\bar{G}$ и $\bar{N}$ равны нулю, то:

$$\sum S_{kx} = -R\cdot t = -0{,}1Gt = -0{,}1mgt. \tag{7.11}$$

Подставляем найденные величины в теорему:

$$-m\upsilon_0 = -0{,}1mgt, \tag{7.12}$$

откуда

$$\upsilon_0 = 0{,}1gt, \tag{7.13}$$

$$t = \frac{\upsilon_0}{0{,}1g} = \frac{20}{0{,}1 \cdot 9{,}81} = 20{,}4\ c. \tag{7.14}$$

Задача 7.2. По настилу, наклоненному под углом 30° к горизонту, опускается груз без начальной скорости. Определить скорость груза по истечении 3 *с*, если коэффициент трения скольжения между грузом и настилом равен 0,5.

Решение.

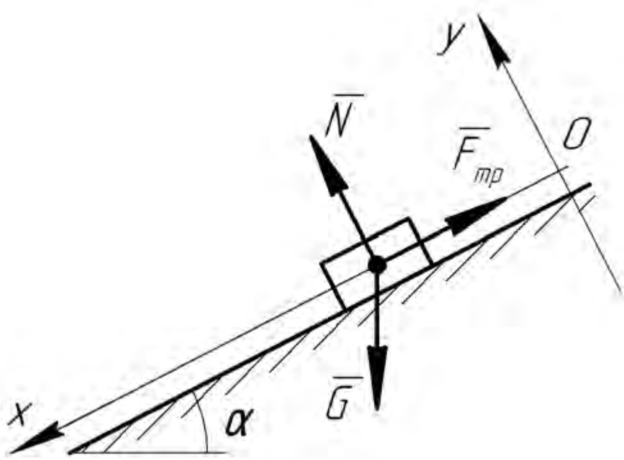


Рис. 7.3

Показываем груз и действующие на него силы: силу тяжести $\overline{G}$, силу трения $\overline{F}_{тр}$ и нормальную реакцию поверхности $\overline{N}$ (рис. 7.3). Ось *x* направляем в сторону движения.

Запишем теорему об изменении количества движения точки в проекции на ось *x*:

Проекции конечной и начальной скорости точки:

Сумма проекций импульсов сил на ось *x*:

$$\sum S_{kx} = \left(\sum X_k\right) \cdot t = \left(G\sin\alpha - F_{тр}\right) \cdot t, \tag{7.17}$$

где $\sum X_k$ – сумма проекций всех сил на ось *x*;

$F_{тр} = fN$ – сила трения скольжения;

f – коэффициент трения.

Нормальную реакцию поверхности найдем, спроецировав все силы на ось *y*:

$$\sum Y_k = N - G\cos\alpha, \tag{7.18}$$

$$N = G\cos\alpha = mg\cos\alpha. \tag{7.19}$$

Тогда сила трения:

$$F_{тр} = fmg\cos\alpha. \tag{7.20}$$

Подставим все найденные величины в теорему об изменении количества движения точки:

$$m\upsilon = \left(mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha\right) \cdot t, \tag{7.21}$$

$$\upsilon = g \cdot \left(\sin\alpha - f\cos\alpha\right) \cdot t = 9{,}81 \cdot \left(0{,}5 - 0{,}5 \cdot 0{,}866\right) \cdot 3 = 1{,}97\ м/с. \tag{7.22}$$

Задача 7.3. Телу, находящемуся на наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол $\alpha = 45°$, сообщена начальная скорость 9,81 *м/с* параллельно плоскости вверх. Определить время движения тела до остановки, если коэффициент трения между телом и плоскостью $f = 0,2$.

Решение.

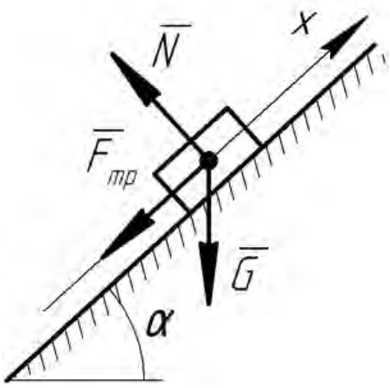


Рис. 7.4

Показываем тело и действующие на него силы: силу тяжести $\overline{G}$, силу трения $\overline{F}_{тр}$ и нормальную реакцию поверхности $\overline{N}$ (рис. 7.4). Ось x направляем в сторону движения – параллельно плоскости вверх.

Теорема об изменении количества движения точки в проекции на ось x:

$$m\upsilon_x - m\upsilon_{0x} = \sum S_{kx}. \qquad (7.23)$$

Проекции конечной и начальной скорости точки:

$$\upsilon_x = \upsilon = 0, \quad \upsilon_{0x} = \upsilon_0 = 9,81 \ м/с. \qquad (7.24)$$

Сумма проекций импульсов сил на ось x:

$$\sum S_{kx} = \left(-G\sin\alpha - F_{тр}\right)\cdot t. \qquad (7.25)$$

Сила трения:

$$F_{тр} = fN = fmg\cos\alpha. \qquad (7.26)$$

Подставляя в теорему об изменении количества движения точки найденные величины, найдем время движения тела до остановки:

$$-m\upsilon_0 = -mg\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right)\cdot t, \qquad (7.27)$$

$$\upsilon_0 = g\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right)\cdot t, \qquad (7.28)$$

$$t = \frac{\upsilon_0}{g\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right)} = \frac{9,81}{9,81\cdot\left(0,707 + 0,2\cdot 0,707\right)} = 1,18 \ c. \qquad (7.29)$$

Задача 7.4. Тело массой $m = 2$ *кг* брошено под углом $\alpha = 45°$ к горизонту с начальной скоростью $\upsilon_0 = 60$ *м/с* (рис. 7.5). Найти импульс равнодействующей всех сил, действующих на тело, за время движения тела из начального положения в наивысшее, если скорость тела в наивысшем положении $\upsilon_1 = 50$ *м/с*.

Решение.

Теорема об изменении количества движения точки в проекции на координатные оси:

$$m\upsilon_x - m\upsilon_{0x} = S_x, \quad m\upsilon_y - m\upsilon_{0y} = S_y, \qquad (7.30)$$

где S_x и S_y – проекции импульса равнодействующей на координатные оси.

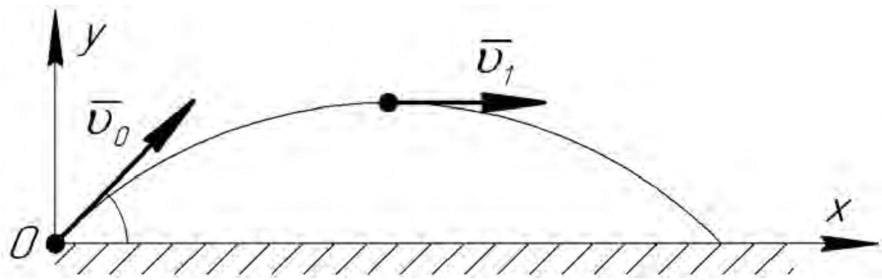


Рис. 7.5

Проекции конечной и начальной скорости точки на координатные оси:

$$\upsilon_x = \upsilon_1, \quad \upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\alpha, \tag{7.31}$$

$$\upsilon_y = 0, \quad \upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\alpha. \tag{7.32}$$

Находим проекции импульса равнодействующей из уравнений (7.30):

$$S_x = m\upsilon_1 - m\upsilon_0 \cos 45° = 2 \cdot 50 - 2 \cdot 60 \cdot 0,707 = 15,16\ H \cdot c, \tag{7.33}$$

$$S_y = -m\upsilon_0 \sin 45° = -2 \cdot 60 \cdot 0,707 = -84,84\ H \cdot c. \tag{7.34}$$

Импульс равнодействующей:

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \sqrt{15,16^2 + (-84,84)^2} = 86,18\ H \cdot c. \tag{7.35}$$

Найдем направление вектора $\overline{S}$ по отношению к осям координат:

$$\cos(\overline{S}, x) = \frac{S_x}{S} = \frac{15,16}{86,18} = 0,176, \quad \angle(\overline{S}, x) = \arccos 0,176 = 79,9°, \tag{7.36}$$

$$\cos(\overline{S}, y) = \frac{S_y}{S} = \frac{-84,84}{86,18} = -0,984, \tag{7.37}$$

$$\angle(\overline{S}, y) = \arccos(-0,984) = 169,9°. \tag{7.38}$$

Задача 7.5. Точка *M* массой *m* движется в плоскости *Oxy* согласно уравнениям $x = a\cos kt$ и $y = b\sin kt$. Определить импульс силы за время, в течение которого точка находится в первой четверти (в положительном квадранте).

Решение:

Найдем траекторию движения точки, для чего преобразуем уравнения движения и возведем в квадрат:

$$\frac{x^2}{a^2} = \cos^2 kt, \quad \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 kt. \tag{7.39}$$

Сложим по частям полученные выражения:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{7.40}$$

Полученное уравнение является уравнение эллипса с полуосями *a* и *b*. Геометрический центр эллипса находится в начале координат (рис. 7.6).

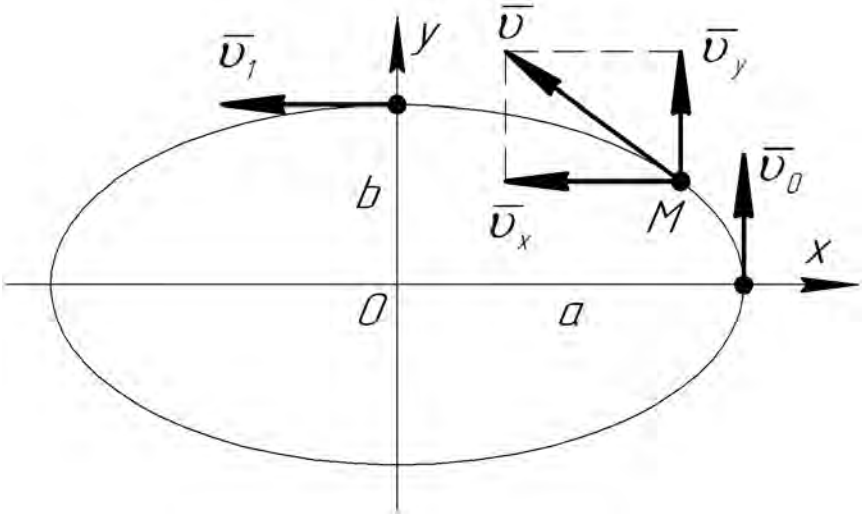


Рис. 7.6

Найдем проекции скорости точки M:

$$\upsilon_x = \dot{x} = -ak\sin kt, \quad \upsilon_y = \dot{y} = bk\cos kt. \tag{7.41}$$

Направление вектора $\bar{\upsilon}$ скорости точки M при ее произвольном нахождении в первой четверти ($0 \le kt \le \pi/2$) показано на рис. 7.6. Также на рисунке показаны положения вектора скорости в начальном ($\bar{\upsilon}_0$) и конечном ($\bar{\upsilon}_1$) положении точки на рассматриваемом участке.

Теорема об изменении количества движения точки в проекции на координатные оси:

$$m\upsilon_x - m\upsilon_{0x} = S_x, \quad m\upsilon_y - m\upsilon_{0y} = S_y. \tag{7.42}$$

Проекции начальной скорости точки на координатные оси ($kt = 0$):

$$\upsilon_{0x} = 0, \quad \upsilon_{0y} = \upsilon_0 = bk. \tag{7.43}$$

Проекции конечной скорости точки на координатные оси ($kt = \pi/2$):

$$\upsilon_x = -\upsilon_1 = -ak, \quad \upsilon_y = 0. \tag{7.44}$$

Находим проекции импульса равнодействующей из уравнений (7.42):

$$S_x = m\upsilon_x = -mak, \quad S_y = -m\upsilon_{0y} = -mbk. \tag{7.45}$$

Импульс силы:

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \sqrt{(-mak)^2 + (-mbk)^2} = mk\sqrt{a^2 + b^2}. \tag{7.46}$$

8 РАБОТА И МОЩНОСТЬ СИЛЫ

Работа силы. *Работа силы – это физическая величина, которая определяет эффект действия силы на перемещении точки ее приложения.*

Работа силы на любом конечном перемещении M_0M равна взятому вдоль этого перемещения интегралу от элементарной работы:

$$A = \int\limits_{\smile M_0M} \delta A . \tag{8.1}$$

При векторном способе задания движения точки:

$$A = \int\limits_{\smile M_0M} \bar{F} d\bar{r} . \tag{8.2}$$

При координатном способе задания движения точки:

$$A = \int\limits_{\smile M_0M} \left(Xdx + Ydy + Zdz \right), \tag{8.3}$$

где X, Y, Z – проекции силы на координатные оси x, y и z соответственно.

При естественном способе задания движения точки:

$$A = \int\limits_{\smile M_0M} F \cos\left(\bar{F}, \bar{\upsilon}\right) ds . \tag{8.4}$$

В случае, если сила постоянна ($\bar{F} = const$):

$$A = Fs\cos\alpha , \tag{8.5}$$

где s – путь, пройденный точкой, м;

α – угол между векторами $\bar{F}$ и $\bar{\upsilon}$ (рис. 8.1).

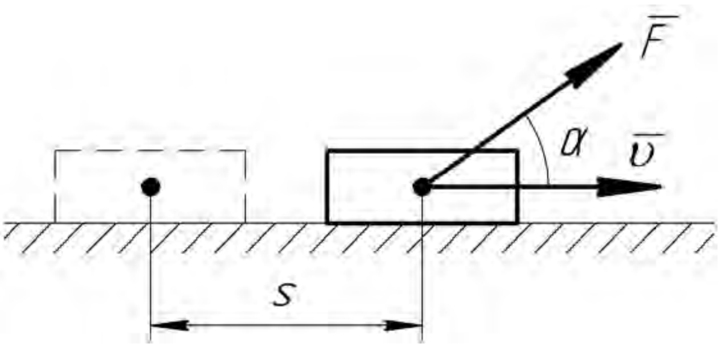


Рис. 8.1

Если $\alpha = 0°$, то $A = FS$,

$\alpha = 180°$, то $A = -FS$,

$\alpha = 90°$, то $A = 0$.

Таким образом, при $0 \le \alpha < 90°$ $A > 0$, а при $90° < \alpha \le 180°$ $A < 0$. Также можем сделать вывод, что *нормальная составляющая силы работы не производит.*

Работа измеряется в *Дж* (джоулях).

Работа силы тяжести равна:

$$A_G = \pm mgh , \tag{8.6}$$

где h – вертикальное перемещение центра тяжести тела.

Работа положительна, если начальная точка выше конечной, и отрицательна, если начальная точка ниже конечной.

Работа силы тяжести не зависит от траектории, по которой перемещается точка ее приложения; на замкнутой траектории работа силы тяжести равна нулю.

Работа силы упругости равна:

$$A_{упр} = -\frac{c}{2}\left(l_2^2 - l_1^2\right), \tag{8.7}$$

где c – коэффициент упругости (для пружины – коэффициент жесткости), Н/м;

l_1 и l_2 – соответственно начальное и конечное удлинение (или сжатие) пружины, м.

Работа силы упругости пружины положительна, когда конец пружины перемещается к равновесному положению ($l_1 > l_2$), и отрицательна, когда конец пружины удаляется от равновесного положения ($l_1 < l_2$).

Если в начальном положении пружина не деформирована, то:

$$A = -\frac{c\lambda^2}{2}, \tag{8.8}$$

где λ – удлинение (сжатие) пружины, м.

Работа силы упругости в этом случае всегда отрицательна.

Мощность силы. *Мгновенная мощность равна отношению производимой элементарной работы к бесконечно малому (элементарному) отрезку времени:*

$$N = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\delta A}{dt}. \tag{8.9}$$

Таким образом, *мощность – это скорость производства работы.*

Если работа совершается равномерно:

$$N = \frac{A}{t}. \tag{8.10}$$

В СИ мощность измеряется в *Вт* (в ваттах). Также может использоваться внесистемная единица измерения – *л.с.* (лошадиная сила):

$$1\,л.с. = 736\ Вт = 0,736\ кВт;\ 1\ кВт = 1,359\ л.с.$$

Мощность силы также можно вычислить по формуле (рис. 8.1):

$$N = F\upsilon\cos\alpha. \tag{8.11}$$

где υ – скорость точки, м/с;

α – угол между векторами $\overline{F}$ и $\overline{\upsilon}$ (рис. 8.1).

Коэффициент полезного действия. *Коэффициентом полезного действия* (*КПД*) *называется отношение полезной работы к работе, затраченной механизмом; также может вычисляться как отношение полезной мощности к затраченной*:

$$\eta = \frac{A_n}{A_з} = \frac{N_n}{N_з}. \tag{8.12}$$

КПД всегда меньше единицы, а полезная работа всегда меньше затраченной вследствие наличия вредных сопротивлений.

Задача 8.1. Определить наименьшую работу, которую надо затратить для того, чтобы поднять на высоту 5 *м* тело массы 2 *тонны*, двигая его по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол в 30°. Коэффициент трения равен 0,5.

Решение:

Покажем тело на наклонной плоскости и действующие на него силы (рис. 8.2).

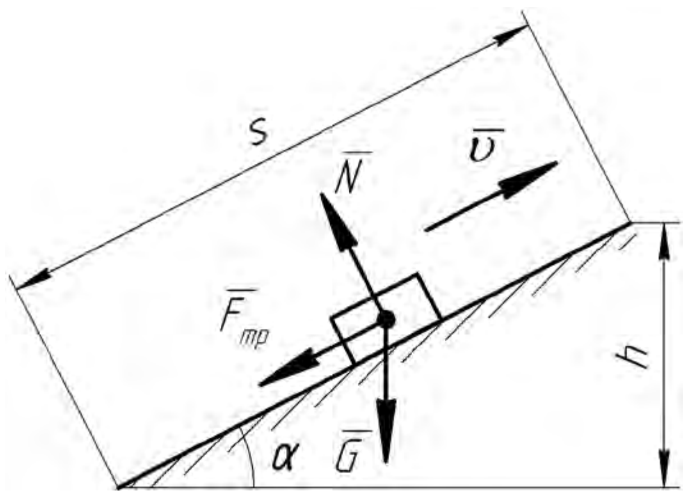


Рис. 8.2

Работу, которую надо затратить для подъема тела по наклонной плоскости, найдем как сумму работ всех сил, приложенных к телу:

$$A = A_G + A_{тр} + A_N. \tag{8.13}$$

Работа на преодоление силы тяжести:

$$A_G = mgh. \tag{8.14}$$

Работа на преодоление силы трения:

$$A_{тр} = F_{тр} \cdot s, \tag{8.15}$$

где $F_{тр} = f \cdot N = fmg \cdot \cos\alpha$ – сила трения скольжения;

$s = h/\sin\alpha$ – длина наклонной плоскости, соответствующая высоте h.

Нормальная реакция $\bar{N}$ наклонной плоскости работы не совершит:

$$A_N = 0. \tag{8.16}$$

Тогда:

$$A = mgh + fmg\cos\alpha \cdot \frac{h}{\sin\alpha} = mgh \cdot (1 + f \cdot \mathrm{ctg}\alpha), \tag{8.17}$$

или с учетом числовых значений

$$A = 2 \cdot 10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 5 \cdot \left(1 + 0{,}5 \cdot 1{,}732\right) = 182868\ \text{Дж} \approx 183\ \text{кДж}. \qquad (8.18)$$

Задача 8.2. Для того чтобы поднять $V = 5000\ м^3$ воды на высоту $h = 3\ м$, поставлен насос с двигателем в 2 *л.с*. Сколько времени потребуется для выполнения этой работы, если КПД насоса 0,8?

Решение:

Масса воды, которую необходимо поднять:

$$m = V\rho, \qquad (8.19)$$

где $\rho = 1000\ кг/м^3$ – плотность воды.

Работа насоса по преодолению силы тяжести воды является полезной работой:

$$A_п = mgh. \qquad (8.20)$$

Тогда из уравнения (8.12) найдем работу, затраченную насосом:

$$A_з = \frac{A_п}{\eta} = \frac{mgh}{\eta}. \qquad (8.21)$$

Из уравнения (8.10) вычислим время, необходимое на подъем воды:

$$t = \frac{A_з}{N_з} = \frac{mgh}{N_з \eta} = \frac{V\rho gh}{N_з \eta}, \qquad (8.22)$$

где $N_з = 2\ л.с. = 1472\ Вт$ – мощность двигателя насоса.

Подставляем числовые значения:

$$t = \frac{5000 \cdot 1000 \cdot 9{,}8 \cdot 3}{1472 \cdot 0{,}8} = 124830\ с \approx 34{,}7\ ч. \qquad (8.23)$$

Задача 8.3. Как велика мощность машины, поднимающей 84 раза в минуту молот массы 200 *кг* на высоту 0,75 *м*, если КПД машины равен 0,7?

Решение:

Машина поднимает молот 84 раза за 60 *с*, тогда время одного подъема составит:

$$t = \frac{60}{84} = 0{,}71\ с. \qquad (8.24)$$

При этом полезная работа составит:

$$A_п = mgh = 200 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}75 = 1470\ Дж. \qquad (8.25)$$

Работа, затраченная машиной с учетом КПД:

$$A_з = \frac{A_п}{\eta} = \frac{1470}{0{,}7} = 2100\ Дж. \qquad (8.26)$$

Мощность машины:

$$N_з = \frac{A_з}{t} = \frac{2100}{0{,}71} = 2957\ Вт \approx 2{,}96\ кВт. \qquad (8.27)$$

Задача 8.4. Вычислить мощность турбогенераторов на станции трамвайной сети, если число вагонов на линии $n = 45$, масса каждого вагона 10 *тонн*, сопротивление трения равно 0,02 веса вагона, средняя скорость вагона $\upsilon = 3,3\ м/с$ и потери в сети 5%.

Решение:

Найдем сопротивление трения от всех вагонов на линии:

$$R = 0,02mg \cdot n = 0,02 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 9,8 \cdot 45 = 88200\ Н\ . \qquad (8.28)$$

Мощность, необходимая для преодоления сопротивления трения:

$$N_п = R \cdot \upsilon = 88200 \cdot 3,3 = 291060\ Вт\ . \qquad (8.29)$$

Так как потери в сети составляют 5%, то $\eta = 0,95$, а мощность турбогенераторов:

$$N_з = \frac{N_п}{\eta} = \frac{291060}{0,95} = 306379\ Вт \approx 306,4\ кВт\ . \qquad (8.30)$$

Задача 8.5. Найти мощность двигателя внутреннего сгорания, если среднее давление на поршень в течение всего хода равно 49 *Н* на 1 *см*^{2}, длина хода поршня $l = 40\ см$, площадь поршня $S = 300\ см^2$, число рабочих ходов 120 в минуту и КПД составляет 0,9.

Решение:

Найдем силу давления на поршень в течение хода:

$$F = p \cdot S\ , \qquad (8.31)$$

где $p = 49\ Н/см^2$ – среднее давление на поршень.

$$F = 49 \cdot 300 = 14700\ Н\ . \qquad (8.32)$$

Поршень совершает 120 рабочих ходов за 60 *с*, тогда время одного хода:

$$t = \frac{60}{120} = 0,5\ с\ . \qquad (8.33)$$

За это время совершается работа:

$$A_з = F \cdot l = 14700 \cdot 0,4 = 5880\ Дж\ . \qquad (8.34)$$

Мощность, получаемая за счет сгорания топлива:

$$N_з = \frac{A_з}{t} = \frac{5880}{0,5} = 11760\ Вт\ . \qquad (8.35)$$

С учетом КПД мощность двигателя внутреннего сгорания составит:

$$N_п = N_з \cdot \eta = 11760 \cdot 0,9 = 10584\ Вт \approx 10,6\ кВт\ . \qquad (8.36)$$

9 ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ТОЧКИ

Кинетической энергией материальной точки называется скалярная величина $\frac{m\upsilon^2}{2}$*, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости.*

Единицей измерения кинетической энергии является *Дж* (джоуль).

Теорема об изменении кинетической энергии точки. *Изменение кинетической энергии точки при некотором ее перемещении равно алгебраической сумме работ всех действующих на точку сил на том же перемещении:*

$$\frac{m\upsilon^2}{2}-\frac{m\upsilon_0^2}{2}=\sum A_k\,. \tag{9.1}$$

С помощью теоремы об изменении кинетической энергии решаются следующие задачи:

1) Зная, как при движении точки изменяется ее скорость, определить работу действующих на нее сил (первая задача динамики).

2) Зная работу действующих сил, определить, как изменяется при движении скорость точки (вторая задача динамики). Это возможно лишь тогда, когда силы постоянны – $\overline{F}=const$, или зависят только от положения движущейся точки – $\overline{F}=f(x)$.

Задача 9.1. По наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 30°, спускается без начальной скорости тяжелое тело; коэффициент трения равен 0,1. Какую скорость будет иметь тело, пройдя 2 *м* от начала движения?

Решение:

Теорема об изменении кинетической энергии точки имеет вид:

$$\frac{m\upsilon^2}{2}-\frac{m\upsilon_0^2}{2}=\sum A_k\,. \tag{9.2}$$

Покажем тело на наклонной плоскости и действующие на него силы (рис. 9.1). Сумма работ всех при спуске тела равна:

$$\sum A_k = A_G + A_{mp} + A_N\,. \tag{9.3}$$

Работа силы тяжести:

$$A_G = mgh\,, \tag{9.4}$$

где $h=s\cdot\sin\alpha$ – высота спуска тела по вертикали.

Работа силы трения:

$$A_{mp}=-F_{mp}\cdot s\,, \tag{9.5}$$

где $F_{mp}=f\cdot N=fmg\cdot\cos\alpha$ – сила трения скольжения.

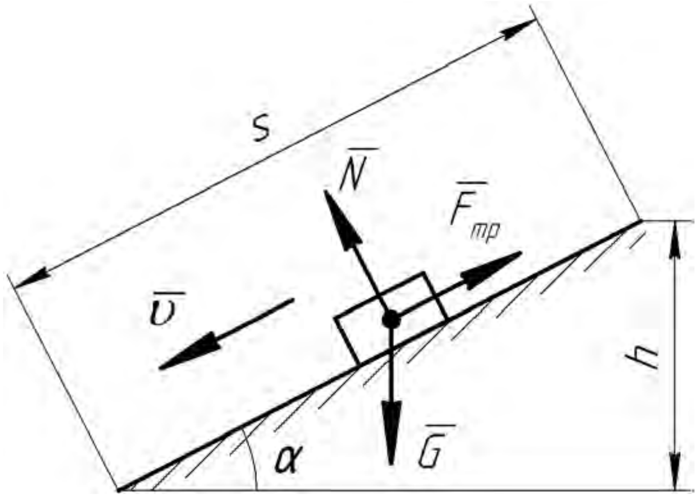


Рис. 9.1

Нормальная реакция $\bar{N}$ наклонной плоскости работы не совершит:

$$A_N = 0. \tag{9.6}$$

Тогда:

$$\sum A_k = mgs \cdot \sin\alpha - fmgs \cdot \cos\alpha = mgs \cdot (\sin\alpha - f \cdot \cos\alpha). \tag{9.7}$$

Подставляем полученное значение в уравнение (9.1), учитывая, что $\upsilon_0 = 0$:

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = mgs \cdot (\sin\alpha - f \cdot \cos\alpha), \tag{9.8}$$

откуда найдем скорость тела в конце участка:

$$\upsilon = \sqrt{2gs \cdot (\sin\alpha - f \cdot \cos\alpha)} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 2 \cdot (0{,}5 - 0{,}1 \cdot 0{,}866)} = 4{,}03 \text{ м/с}. \tag{9.9}$$

Задача 9.2. Грузу, лежащему на горизонтальной плоскости, сообщают (толчком) начальную скорость υ_0. Последующее движение груза тормозится силой трения (рис. 9.2). Определить, какой путь пройдет груз до остановки, если коэффициент трения равен f.

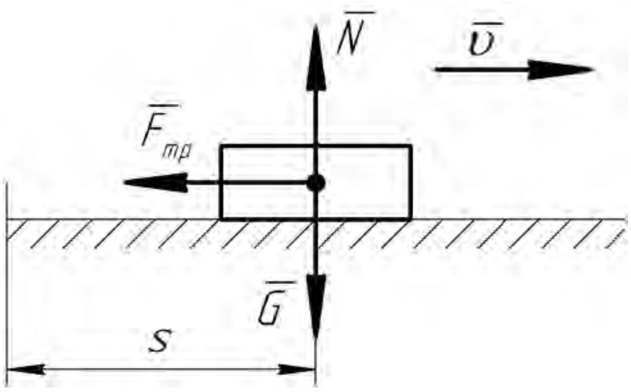


Рис. 9.2

Решение:

Воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии точки:

$$\frac{m\upsilon^2}{2}-\frac{m\upsilon_0^2}{2}=\sum A_k\,. \qquad (9.10)$$

Т.к. нормальная реакция поверхности и сила тяжести работы не совершат ($A_N=0$, $A_G=0$), то:

$$\sum A_k=A_{тр}=-F_{тр}\cdot s=-fNs=-fmgs\,. \qquad (9.11)$$

Скорость груза в конце движения равна нулю ($\upsilon=0$). Тогда:

$$-\frac{m\upsilon_0^2}{2}=-fmgs\,, \qquad (9.12)$$

откуда

$$s=\frac{\upsilon_0^2}{2fg}\,. \qquad (9.13)$$

Задача 9.3. Материальная точка массы 3 *кг* двигалась по горизонтальной прямой влево со скоростью 5 *м/с*. К точке приложили постоянную силу, направленную вправо. Действие силы прекратилось через 30 *с*, и тогда скорость точки оказалась равной 55 *м/с* и направленной вправо. Найти величину этой силы и совершенную ею работу.

Решение:

Чтобы найти величину силы, действующей на точку, воспользуемся теоремой об изменении количества движения точки в проекции на ось *x*, проведенную вправо:

$$m\upsilon_x-m\upsilon_{0x}=S_x\,. \qquad (9.14)$$

Проекции соответственно конечной и начальной скорости точки:

$$\upsilon_x=\upsilon\,,\quad \upsilon_{0x}=-\upsilon_0\,. \qquad (9.15)$$

Проекция импульса силы:

$$S_x=F\cdot t\,. \qquad (9.16)$$

Тогда:

$$m\upsilon-\left(-m\upsilon_0\right)=F\cdot t\,, \qquad (9.17)$$

откуда

$$F=\frac{m\left(\upsilon+\upsilon_0\right)}{t}=\frac{3\cdot\left(55+5\right)}{30}=6\ Н\,. \qquad (9.18)$$

Работу, совершенную силой, найдем из теоремы об изменении кинетической энергии точки:

$$A=\frac{m\upsilon^2}{2}-\frac{m\upsilon_0^2}{2}=\frac{m}{2}\cdot\left(\upsilon^2-\upsilon_0^2\right)=\frac{3}{2}\cdot\left(55^2-5^2\right)=4500\ Дж=4{,}5\ кДж\,. \qquad (9.19)$$

Задача 9.4. Вагон массы m ударяет в пружинный амортизатор жесткости c, имея в момент начала удара скорость υ_0. Определить максимальную деформацию пружины, пренебрегая ее массой и полагая ее недеформированной перед ударом.

Решение:

Для определения деформации пружины амортизатора воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии точки:

$$\frac{m\upsilon^2}{2}-\frac{m\upsilon_0^2}{2}=A\,, \tag{9.20}$$

где $A=-\dfrac{c\lambda^2}{2}$ – работа силы упругости пружины.

Т.к. скорость вагона в конце удара равна нулю, то:

$$-\frac{m\upsilon_0^2}{2}=-\frac{c\lambda^2}{2}\,, \tag{9.21}$$

откуда найдем деформацию пружины:

$$\lambda=\sqrt{\frac{m\upsilon_0^2}{c}}=\upsilon_0\sqrt{\frac{m}{c}}\,. \tag{9.22}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРНЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Белов М. И. Теоретическая механика / М. И. Белов, Б. В. Пылаев. – 2-е изд. - Москва: РИОР: ИНФРА-М, 2020. – URL: https://znanium.com/catalog/product/1048445 (дата обращения: 14.09.2022). – Режим доступа: по подписке.

2. Теоретическая механика: практикум / Т. А. Валькова, А. Е. Митяев, С. Г. Докшанин [и др.]. – Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2020. – URL: https://znanium.com/catalog/product/1830740 (дата обращения: 14.09.2022). – Режим доступа: по подписке.

3. Кирсанов М.Н. Решения задач по теоретической механике: учебное пособие. – 2-е изд., доп. – Москва: ИНФРА-М, 2021. – URL: https://znanium.com/catalog/product/1102072 (дата обращения: 14.09.2022). – Режим доступа: по подписке.

СОДЕРЖАНИЕ